Lezione 2: logica predicativa

Prof. Stefano Ricci

Appendice Lezione 1: la disgiunzione esclusiva

- Per ciò che concerne la disgiunzione possiamo valutare anche il ruolo della disgiunzione **esclusiva** (latino **aut**; informatica **XOR**), rispetto a quella già da noi conosciuta disgiunzione *inclusiva* (logica **V**; latino **vel**; informatica **OR**). In logica, non è fondamentale introdurre l'**aut** perché può essere ridotto alle altre costanti logiche attraverso l'equivalenza

$$p \ \mathbf{aut} \ q \leftrightarrow \neg[(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)]$$

- Se proviamo a fare la tavola di verità di entrambe le espressione troveremo, infatti, gli stessi valori

p	q	p **aut** q	$\neg\,[(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)]$
1	1	0	0
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	0	0

I predicati

La logica proposizionale combina proposizioni semplici in complesse tramite i connettivi logici. Per il calcolo proposizionale il significato intrinseco di una proposizione non ha alcun valore: quello che interessa è il suo valore di verità (nella logica classica: V o F).

Ma la prima forma di logica, elaborata sin dal IV sec. a.C. da Aristotele, si occupava invece di come fossero «costruite» le proposizioni al loro interno.

Aristotele sosteneva che ogni proposizione fosse costruita internamente tramite due termini: il **Soggetto** e il **Predicato** (studiati nelle *Categorie*). Prendiamo una proposizione elementare (semplice) come:

«Callicle studia geometria»

Questa, come si può facilmente vedere, è «composta» da un Soggetto («Callicle») e un predicato («studia geometria»). Un altro esempio, celeberrimo, è

«Socrate è un uomo».

Se volessimo formalizzare queste due proposizioni risulterebbe la forma generale

«S è P»

Logica dei predicati del primo ordine (LPC)

- Da Frege e Russell (grandi logici vissuti tra il XIX e il XX sec.) la logica di aristotele venne estesa anche alle relazioni. Ad esempio,

  «Callicle è più basso di Socrate»

  Anche le relazioni possono essere viste come predicati a più posti (aventi più **argomenti**) e, ispirandosi alla matematica, i due logici succitati formalizzano in generale la forma della proposizione come

  P(s) = Socrate è uomo   R(c,s)= Callicle è più alto di Socrate

Nulla impedisce di avere anche relazioni a tre o più termini (argomenti), che potremmo formalizzare così

$R^3(x, y, z)$ o $R^4(x, y, z, s)$ ecc.

Ogni relazione può essere interpretata come Predicato a n-posti.

$P(a)$= un certo *a* è P

$P^2\,(a, b)$= Per *a* e *b* vale la relazione P^2

P, P^2, P^3, ecc. rappresentano i predicati, laddove *a*, *b*, *c*, ecc. rappresenta precisi oggetti individuali (ad esempio **Nomi**).

Potremo anche generalizzare un predicato dicendo che vale per un oggetto qualsiasi x, y, z, ecc. ottenendo la forma

$$P(x) \text{ oppure } P^2(x, y) \text{ ecc.}$$

Per esempio, se P = Camminare, avremo ad esempio

P(x)= «x cammina»

Frege e Russell chiamano questa espressione *funzione propoziona*le o forma predicativa *insatura*, poiché non è una vera proposizione dato che *x* è incognita (non potremo quindi sapere se «x cammina» è vera oppure no, almeno sino a quando non sostituissimo all’incognata un nome come «Callicle» o una espressione costante come *a*.)

In conclusione, P(*a*) rappresenta la struttura di una vera e propria proposizione elementare, poiché *a* è conosciuto (ad esempio, un nome o una descrizione definita come «Il professore che tiene il corso di logica») e può dunque essre valutata come V o F, mentre P(*x*) è un simbolo incompleto che potrà o no essere **soddisfatto**.

Ma l'espressione incompleta P(*x*) può essere molto utile perché potrà essere **quantificata**. Ad esempio, potremmo chiederci quante persone camminano e potremmo rispondere «Alcune» oppure «Tutte» (in logica classica questo basta e avanza)

I quantificatori

Supponiamo di avere una funzione proposizionale incompleta come «*x* è italiano». Potremmo chiederci quanti individui in questa scuola o città, la soddisfano. E potremmo certo rispondere «Alcuni» o «Tutti».

Avremo dunque espressioni complete, dunque V o F, come «Alcuni degli x sono italiani» oppure «Tutti gli x sono italiani».

In logica «Alcuni» e «Tutti» vengono chiamati quantificatori, ed entrano a far parte delle costanti logiche.

Nella logica del primo ordine «Alcuni» vuol dire « Esiste almeno un» e «Tutti» equivale a «Per ogni».

Quantificatore esistenziale

$\exists x$ P(x)   Da leggersi «Esiste (almeno) un *x* tale che P »

Quantificatore universale

$\forall x$ P(x)   Da leggersi «Per tutti gli *x* tali che P »

Relativamente ad un certo domini di oggetti su cui x varierà, queste sono vere e proprie proposizioni elementari, che potranno essere valutate V o F.

Già i logici antichi avevano scoperto l’ovvia traduzione di un quantificatore nell’altro.

$\exists \leftrightarrow \neg\forall\neg$

$\forall \leftrightarrow \neg\exists\neg$

Per cui, in base al principio di economia, potremmo usare in LPC un unico quantificatore.

Consideriamo ora una tipica proposizione aristotelica come la **A** (Universale affermativa):

«Tutti gli A sono B»

Per tradurla con i quantificatori moderni dovremo prima «intenderla» come la seguente proposizione (che ne conserva il significato)

«Se tutti gli x sono A allora sono anche B»

oppure traduciamo la **I** (Particolare affermativa)

«Esiste almeno un x che è sia A che B»

Traduciamo adesso le proposizioni **A**, **E**, **I**, **O** del quadrato aristotelico con la simbologia moderna.

- **A** = $\forall x\ (Px \rightarrow Qx)$

(esempio, «Tutti gli italiani(P) sono vaccinati (Q)»)

- **E** = $\forall x\ (Px \rightarrow \neg Qx)$

(«Nessun italiano è vaccinato»)

- **I** = **∃*x* (P*x* ∧ Q*x*)** («Alcuni italiani sono vaccinati»)
- **O** = **∃*x* (P*x* ∧ ¬Q*x*)** («Alcuni italiani non sono vaccinati»)

Osservando i quantificatori è adesso evidente come mai, ad esempio, **A** ed **O** siano contraddittori:

per le equivalenze tra forme di quantificatori rendiamo $\forall x\ (Px \rightarrow Qx)$ nella forma $\neg\exists x\neg(Px \rightarrow Qx)$

Se $\neg\exists x\neg(Px \rightarrow Qx)$ allora

(1) $\neg\exists x\neg(\neg Px \vee Qx)$ per le equivalenze di PC

(2) $\neg\exists x\ \neg\neg(\neg\neg\ Px\wedge\neg Qx)$ per DeM [$p\vee q \leftrightarrow \neg(\neg p\wedge\neg q)$]

(3) **$\neg\exists x(Px\wedge\neg Qx)$** Per DN

Soddisfacimento, verità e validità di una fbf in LPC

Semantica di Tarski (1902-1983): la complessità dell'assegnazione a LPC di una semantica, rispetto alla semplicità della semantica «a tavole di verità» del PC, si può ridurre, con alcune limitazioni, ad alcuni tipi di semantica elaborate da vari autori, tra cui Frege e Tarski. Faremo riferimento alla semantica tarskiana.

Soddisfacimento

Definiamo un *dominio* come un insieme di oggetti che costituisce l'universo di discorso.

Si definisce poi una *funzione interpretazione* come una funzione che attribuisce significati alle costanti individuali, alle costanti predicative, ai simboli di funzione, associandoli ad elementi del dominio o a loro *n*-ple.

Abbiamo così una *struttura* **S**.

Definizione di struttura: **S** è una coppia ordinata $<D, I>$ tale che

1) $D \neq \emptyset$;

2) I è una funzione che assegna:

- a ciascuna costante individuale un elemento di D
- a ogni costante predicativa a n posti una relazione R tale che $R \subseteq D^n$
- a ogni simbolo di funzione a n posti una funzione F tale che $F: D^n \rightarrow D$

Data una struttura **S** è possibile definire una funzione *V* detta *assegnazione* di valori di una variabile ad elementi di *D*. Si può simbolicamente rendere un'assegnazione *V* ad un termine *t* del linguaggio *denotante* elementi di *D*, come:

$V[t]_{\mathbf{S}}$

Definizione di denotazione:

- Se t è una costante individuale, allora $V[t]_{\mathbf{S}} = [t]_{\mathbf{S}}$
- Se t è una variabile, allora $V[t]_{\mathbf{S}} = V(t)$
- Se t ha la forma $ft_1, \ldots, t_n$ allora $V[t]_{\mathbf{S}} = [f]_{\mathbf{S}} (V[t_1]_{\mathbf{S}}, \ldots, V[t_n]_{\mathbf{S}})$

Sulla base di tale definizione si può definire per via induttiva la relazione di *soddisfacimento* di una formula da parte di *V* in **S**:

- V soddisfa $P^n t_1, \ldots, t_n$ sse $<V[t_1]_{\mathbf{S}}, \ldots, V[t_n]_{\mathbf{S}}> \in [P^n]_{\mathbf{S}}$;
- V soddisfa $\neg\alpha$ sse V non soddisfa α;
- V soddisfa $\alpha \rightarrow \beta$ sse V non soddisfa α o V soddisfa β:
- V soddisfa $\forall x\alpha$ sse ogni x-variante di V soddisfa α.

Quando una formula α è tale che almeno in una struttura c'è qualche assegnazione che la soddisfi, si dice che α è *soddisfacibile*.

Dato un enunciato *α* e una struttura **S**, sia $[\alpha]_{\mathbf{S}}$ il valore di verità di *α* in **S.** Allora:

$[\alpha]_{\mathbf{S}} = 1$ sse ogni assegnazione in **S** soddisfa *α;*

$[\alpha]_{\mathbf{S}} = 0$ sse nessuna assegnazione in **S** soddisfa α.

Da ciò si può definire il concetto di validità in LPC

Validità

$\models \alpha$ sse *α* è soddisfacibile da tutte le assegnazioni in tutte le strutture

Coerenza, completezza e decidibilità di LPC

Il calcolo LPC si può dimostrare essere

- coerente (cioè che dati gli assiomi e le regole di trasformazione, per qualunque fbf α, non si potrà mai ottenere $\alpha \wedge \neg\alpha$);
- completo (cioè che in LPC assiomatico, se, per qualunque α, $\models \alpha$ allora $\vdash \alpha$);
- semi-decidibile (cioè si può decidere finitamente la validità di una fbf di LPC, ma non la sua non-validità)

Il problema delle proposizioni singolari e la teoria del significato

Se riprendiamo in considerazione il caso delle proposizioni singolari (che noi vogliamo scrivere genericamente come P*a*) che Aristotele aveva eliminato dalla considerazione del quadrato logico, ci rendiamo conto di alcune questioni interessanti dal punto di vista filosofico. Lo sviluppo di teorie sul modo in cui un soggetto si rapporta ad un predicato è legato alla teoria del significato di Frege e alla sua parziale ripresa da parte di Russell. L'opera a cui faremo riferimento è quella di Russell, *On Denoting*,(1905). Laddove Frege sostenne che vi erano due distinti aspetti del significato di ogni termine e proposizione (il loro *Sinn* e la loro *Bedeutung,* cioè il «senso» e la «denotazione», che già erano comparsi nella logica terministica medievale come «intensio» ed «exstensio»), Russell rifiutò la nozione di «senso» e la sostituì con quella di *funzione proposizionale*. Russelle elabora, dunque, una teoria *estensionale* del significato. Esempi portati da Russell come entità linguistiche denotanti sono: «un uomo, ogni uomo, l'attuale Re di Francia, il centro di massa del sistema solare». Alcune espressioni denotanti denotano effettivamente un oggetto («il centro di massa del sistema solare», «Ogni uomo»), altre non denotano nulla (cioè denotano l'insieme vuoto, come «l'attuale Re di Francia»), altre denotano ambiguamente («un uomo»). Ma in particolare secondo Russell ogni nome proprio può essere sostituito da una descrizione definita: così Aristotele, dovrebbe essere sempre sostituibile con una descrizione specifica e definita individualmente, come «Il maestro di Alessandro».

Secondo una tale teoria, detta appunto delle **descrizioni definite**, ogni nome proprio del linguaggio comune può essere sostituito da una *descrizione definita* (o piuttosto, come correggerà il filosofo John Searle, con un «grappolo» (*cluster*) di descrizioni definite). Ma Russell riconduce le descrizioni definite stesse nell'alveo della logica classica estensionale rileggendo ad esempio la proposizione contentente una descrizione definita

«Il padre di Carlo II fu decapitato»

nel seguente modo

$$\exists x((\mathrm{P}x \land \forall y\ (\mathrm{P}y \rightarrow\ x=y)) \land \mathrm{Dx})$$

Quindi per ogni frase che contenga la descrizione «Il padre di Carlo II» implicherà la seguente proposizione esistenziale

$$\exists x(\mathrm{P}x \land \forall y\ (\mathrm{P}y \rightarrow\ x=y))$$

Il che vuol dire che esiste uno ed un solo oggetto che corrisponde al padre di Carlo II.
Questa lettura serve a Russell per dirimere un'importante questione: che significato dare alla proposizione «L'attuale Re di Francia è calvo»?
Se ogni proposizione contenente una descrizione definita che corrisponde ad una proposizione esistenziale deve essere interpretata in senso estensionale dovrà per forza denotare gli unici oggetti che una proposizione può denotare: il vero o il falso.
Dunque la proposizione precedente sul Re di Francia è semplicemente falsa poiché implica che qualcosa che non esiste, esista.

Oggetti non esistenti e il problema dei nomi propri

D'altro canto, è stato fatto notare, siamo portati a ritenere che una proposizione come «L'attuale Re di Francia non esiste» sia vera, benché secondo l'interpretazione russelliana dovrebbe essere falsa.
È il ben noto problema degli «oggetti inesitenti» o non denotanti: Russell vorrebbe fornire un metodo per evitare le teorie realistiche degli oggetti inesistenti come quella dei Meinong (1853-1920): secondo Meinong, gli oggetti «inesistenti» non hanno esistenza (*Existenz* o *Wirklichkeit*), bensì hanno **sussistenza** (*Bestand*). Vi sono poi oggetti che sono dati (*Gegebenheit*) ma non sussistono e non esistono.
Ciò però voleva dire per Russell distinguere due o più sensi del verbo «essere» e ciò era per lui, e per la concezione estensionale della logica, qualcosa di totalmente inaccettabile. Quine arriverà a dire, dopo aver corretto e riformulato la teoria delle descrizioni definite, la celebre frase: «Essere è essere il valore di una variabile».

Un altro problema che incontra la teoria di Russell è l'inadeguatezza della riduzione dei nomi propri a descrizioni definite nei contesti intensionali e modali.
L'esempio classico, che fornirà a S. Kripke lo spunto per la costruzione della sua «nuova teoria del significato», è, ad esempio,

«Necessariamente Aristotele è Aristotele»

Questa è una affermazione analitica (una tautologia), poiché essendo che sempre A=A, ciò è vero anche necessariamente.
Ma se sostituiamo al nome proprio Aristotele, come vuole Russell, la descrizione definita corrispondente, ad esempio, «il maestro di Alessandro», si otterrebbe

«Necessariamente Aristotele è il maestro di Alessandro»

che per quanto la si possa considerare fattualmente, cioè storicamente, vera non pare avere la proprietà di essere «analitica», e si potrebbero pensare mondi possibili in cui ciò è sicuramente falso.
Da questo sviluppo logico e metafisico, Kripke proporrà la sua teoria dei nomi propri come designatori rigidi.

Bibliografia e risorse online

- A. Iacona, S. Cavagnetto, *Teoria della logica del primo ordine*, 2010, Carocci
- http://tinyurl.com/j9sfykp
- F. Berto, *L'esistenza non è logica*, Laterza,
- I testi introduttivi già citati nella lezione 2.