Corso di logica 2018/1029

Prof. Stefano Ricci

Filosofia, robotica, Intelligenza Artificiale

La logica è lo studio del ragionamento corretto. Nel linguaggio e nel pensiero quotidiano noi produciamo moltissimi ragionamenti (sarebbe meglio dire, **inferenze**), non tutti corretti. D'altro canto i nostri strumenti di pensiero naturale, a volte, non consentono di stabilire con certezza se un ragionamento sia corretto o no. Questo può dipendere anche dal fatto che il nostro pensiero e il nostro linguaggio quotidiano possano essere ambigui, fuorvianti e, in generale, errati. La logica cerca di evitare tali problemi attraverso la **formalizzazione** del linguaggio e delle procedure inferenziali.

Lezione 1: La formalizzazione del linguaggio. La logica proposizionale

Iniziamo a presentare alcuni tipici esempi di «ragionamento» espressi in linguaggio naturale (per poi provare a formalizzarli):

1) «Se mi ritiro adesso, perdo»

2) «Non ho mai conosciuto abitanti della Lapponia,

tu dici di essere un abitante della Lapponia, dunque, finalmente ho conosciuto un lappone»

3) «Tutte le palline estratte sinora da quell'urna erano nere, dunque la prossima pallina estratta sarà nera»

4) «Alcuni cani sono senza coda, tutti i cani che ho visto finora hanno la coda, dunque alcuni cani hanno la coda»

5) Tutti i canidi sono mammiferi; la volpe è un canide, dunque la volpe è un mammifero

6) Se piove le strade sono bagnate; piove, dunque le strade sono bagnate

Il primo esempio non è, a rigore, una inferenza (o un ragionamento) anche se può sembrarlo. Si tratta piuttosto di una proposizione ipotetica (un condizionale) avente la forma «Se *p* allora *q*». Affinché risultasse un vero ragionamento dovremmo aggiungere prima di «allora...» una serie di altre circostanze che nella frase non vengono eplicitate (Ad esempio, che stiamo giocando a carte, ad un particolare gioco che preveda la sconfitta in alcuni casi, ivi compreso il caso di un ritiro dal gioco prematuro, che a quel gioco voi teniate almeno un po’, ecc.). Tutte condizioni difficilmente **formalizzabili** (cioè esprimibili con chiarezza e in forma oggettiva).

Il secondo esempio è, di fatto, un ragionamento scorretto, poiché si basa su una opinione non valutabile oggettivamente (a meno di non credere ciecamente al mio interlocutore); per trattare casi simili la logica contemporanea ha sviluppato dei sistemi legati a credenze o «contenuti epistemici». Non è di questi sistemi che parleremo però qui adesso. Il terzo esempio, si basa invece su un ragionamento «induttivo»: la conclusione non è infatti garantita dalle premesse (potremmo estrarre una pallina bianca, dopotutto). Per quanto il ragionamento induttivo sia importante per la vita quotidiana (e anche per l'avanzamento delle scienze) esso non può essere catturato attraverso una semplice formalizzazione.

Il quarto esempio, rappresenta una inferenza che si può ritenere deduttiva (la logica dalla quale partiremo), anche se non immediatamente formalizzabile (servono alcune assunzioni ulteriori).

Il quinto e il sesto esempio, rappresentano invece delle inferenze deduttive completamente formalizzabili (e dunque risulteranno valide in virtù della sola forma logica):

- Quarto esempio semi-formalizzato:

Tutti gli C sono M

Tutti i V sono C

dunque

Tutti i V sono M

(come si può facilmente provare questo ragionamento è valido indipendentemente da cosa siano C, V e M).

Possiamo ulteriormente rendere ancor più generale l'inferenza deduttiva scrivendo:

- Tutti gli X sono Y

  Tutti gli Y sono Z

  dunque

  Tutti gli X sono Z

  utilizzando le consuete variabili derivate dalla matematica (intendendole però come concetti universali e non solo di tipo matematico). Come vedremo nella seconda lezione (logica predicativa) potremo ulteriormente formalizzare il ragionamento utilizzando alcune delle **costanti** logiche che introdurremo in seguito.

- Per ciò che concerne il sesto tipo di ragionamento la sua formalizzazione sarà:

Se *p* allora *q*

p

dunque

q

anche in questo caso la validità dell'inferenza non dipende da cosa significhino le proposizioni *p* e *q*; di seguito vedremo come si possa ulteriormente formalizzare l'inferenza grazie alle **costanti** logiche.

- In generale possiamo dire che un ragionamento (o inferenza) avrà una forma come

$Premessa_1$

$Premessa_2$

….

dunque

Conclusione

Come abbiamo mostrato negli esempi, tuttavia, non tutte le inferenze sono valide (quando cioè le premesse conducono necessariamente alla conclusione, come negli ultimi due esempi). Quando l'inferenza è valida si dice **deduttiva**.

- La logica deduttiva ha una lunga storia che risale almeno ad Aristotele, ma coesistono con essa anche logiche diverse (come l'induttiva, la dialettica ecc.). In queste due prime lezioni presenteremo alcuni modi in cui si può formalizzare la logica deduttiva (che è anche la logica principalmente adottata in matematica e in informatica)

La logica proposizionale (o degli enunciati)

- Se l'inferenza deduttiva è composta da un certo numero di premesse (necessarie e sufficienti) da cui trarre una conclusione, bisogna rilevare come il ragionamento sia composto da proposizioni o enunciati. Riprendiamo il sesto esempio: Se *piove* allora *le strade sono bagnate*; *piove*, dunque *le strade sono bagnate*. In corsivo sono poste le parole che «danno senso» alla dimostrazione poiché possono essere vere o false: queste si dicono **proposizioni** (qualcuno preferisce enunciati o asserzioni)

Le proposizioni «piove» e «le strade sono bagnate» si dicono elementari (o atomiche: possono essere V o F senza bisogno di constatare altro), mentre la proposizione «Se piove allora le strade sono bagnate» è una proposizione composta (o molecolare). La logica delle proposizioni della logica formale ci assicura che il valore di verità delle proposizioni complesse è funzione del valore delle proposizioni atomiche: si dice perciò che è *verofunzionale*. La logica formale classica è anche *bivalente*: accetta, cioè, come valori di verità solo il vero e il falso).

- Ci occuperemo quindi innanzitutto della logica formale proposizionale verofunzionale e bivalente.
- Essendo verofunzionale possiamo procedere alla formalizzazione di alcune proposizione esemplificative e poi vederne formalizzato il ragionamento.

Se stipuliamo che ogni proposizione atomica esprimibile possa essere rappresentata da una lettera variabile come *p*, *q*, *r*, ecc., una proposizione complessa verofunzionale potrebbe essere qualcosa come:

p oppure *q* *p* e *q* non *p* non *q* Se *p* allora *q.*

- Le parole che congiungono le proposizioni elementari, o che ne modificano il valore di verità (come «non»), vengono chiamati appunto connettivi logici e si possono scrivere
- **¬ non (negazione)**
- **V o/oppure (disgiunzione)**
- **Λ e (congiunzione)**
- **→ «Se … allora...» (condizionale o implicazione materiale)**

- Ad esempio, $\neg\, p$ (si legge non-*p*) è la negazione di *p* (che vuol dire: se p è Vera $\neg\, p$ è Falsa e viceversa, qualunque cosa sia *p*!);

  $p \lor q$ si legge «*p* oppure *q*» ed è vera quando almeno una tra *p* e *q* è vera;

  $p \land q$ si legge «*p* e *q*» ed è vera quando entrambe *p* e *q* sono vere

  $p \rightarrow q$ si legge «Se *p* allora *q*» ed è sempre vera tranne nel caso che *p* sia vera e *q* falsa.

  Un modo per interpretare (semantica) il valore dei connettivi è tramite le tabelle di verità

Tavole di verità.

Si prendano due proposizioni elementari qualsiasi *p* e *q*. Applicando i connettivi in modo opportuno possiamo ottenere le seguenti valutazioni per gli enunciati composti:

p	$\neg p$
1	0
0	1

p	q	$p \land q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

p	q	$p \lor q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Implicazione ed equivalenza

p	q	$p \to q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Nel caso dell'implicazione materiale abbiamo subito un problema: il condizionale rappresentato dalle tavole di verità non sembra corrispondere al modo consueto del linguaggio comune di interpretare un condizionale.

p	q	$p \leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

- Passiamo adesso a formalizzare i ragionamenti con i nuovi strumenti adottati

  Un primo esempio deriva dal sesto ragionamento di cui sopra (ricordiamo che era una inferenza deduttiva):

- $p \rightarrow q$

  p

  ___________ *(modus ponens)*

  q

  Un altro esempio di inferenza celebre è il seguente:

- $p \rightarrow q$

  $\neg q$

  ___________ *(modus tollens)*

  $\neg p$

- $p \lor q$

  $\neg q$

  ____

  p

- $p \land q$ $\qquad\qquad$ $p \land q$

- ______ $\qquad\qquad$ _______ *(eliminazione di* **∧***)*

  p $\qquad\qquad$ q

- Utilizzando poi le precedenti regole e il linguaggio logico introdotto (variabili proposizionali e costanti logiche) possiamo sviluppare un calcolo delle proposizioni (**PC**) in cui da **tesi** si deducono invaribilmente sempre e soltanto tesi (chiamiamo **tesi** o una proposizione sempre vera per forma, come ad es. $p \lor \neg p$ (tautologia), oppure una proposizione derivata da formule sempre vere .

- Il sistema PM rappresenta l'*assiomatizzazione* del Calcolo Proposizionale fornita da Russell e Whitehead nell'opera del 1910-13 *Principia Mathematica*.

- Ci sono quattro assiomi:
  A1 $(p \vee p) \rightarrow p$
  A2 $q \rightarrow (p \vee q)$
  A3 $(p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$
  A4 $(q \rightarrow r) \rightarrow (p \vee q) \rightarrow (p \vee r)$

- Ci sono due regole di trasformazione primitive

  R1 **Regola di sostituzione uniforme**: Sostituendo uniformemente una qualunque variabile di una tesi con una qualunque fbf si ottiene ancora una tesi.
  R2 **Modus ponens**: Se α e $\alpha \rightarrow \beta$ sono tesi, β è una tesi.
- Da questi assiomi (che sono tesi in quanto sempre veri) si ottengono, tramite le regole (ad es. Modus ponens), tutte le tesi (teoremi) che possano essere dedotte da tali assiomi. PC è coerente e completo perché (si può dimostrare) ogni sua tesi **vera** sarà anche **dimostrabile**, e ogni tesi **dimostrabile** sarà anche **vera**

Trasformazioni di equivalenza

Elenchiamo qui alcune equivalenze derivate deduttivamente (e dunque valide) dagli assiomi PM che sono particolarmente utili per effettuare trasformazioni del PC.

$$\left.\begin{array}{ll} \textbf{PC1} & p\land q \leftrightarrow \neg(\neg p\lor\neg q) \\ \textbf{PC2} & p\lor q \leftrightarrow \neg(\neg p\land\neg q) \end{array}\right\} \text{Leggi di De Morgan}$$

$$\begin{array}{ll} \textbf{PC3} & p \leftrightarrow \neg\neg p \end{array} \quad \text{Doppia negazione}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \textbf{PC4} & p\lor q \leftrightarrow q\lor p \\ \textbf{PC5} & p\land q \leftrightarrow q\land p \end{array}\right\} \text{Leggi commutative}$$

$$\begin{array}{ll} \textbf{PC6} & p \rightarrow q \leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p \end{array} \quad \text{Legge di contrapposizione}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \textbf{PC7} & p\land(q\lor r) \leftrightarrow (p\land q)\lor(p\land r) \\ \textbf{PC8} & p\lor(q\land r) \leftrightarrow (p\lor q)\land(p\lor r) \end{array}\right\} \text{Leggi distributive}$$

Dimostrazione di un teorema in PM

Dimostriamo il teorema

T1 $p \rightarrow (p \vee q)$

(1) $q \rightarrow (p \vee q)$ per **A2**

(2) $p \rightarrow (q \vee p)$ per **R1** sostituendo *p* con *q* e viceversa, uniformemente

(3) $\mathrm{p} \rightarrow (p \vee q)$ per **PC4**

QED

Semantica.
Validità in PM: il metodo della R*eductio*

Il metodo della *Reductio* ci consente di valutare in modo rapido e sicuro se una fbf sia una tesi valida di PM oppure no. Può sostituire, con alcune condizioni, il metodo delle tavole di verità, specialmente se le fbff sono particolarmente complesse. In breve si tratta di ipotizzare la falsità della fbf e conseguentemente stabilire, per un'assegnazione di valori di verità uniforme, se si incorra in una contraddizione, cioè in cui si venga ad attribuire alla stessa proposizione tanto il valore 1 che il valore 0. Vediamo prima un caso semplice e poi uno più complesso.

$$p \rightarrow (p \vee q)$$

$$\underline{\mathbf{1}} \quad 0 \quad \underline{\mathbf{0}} \;\; 0 \;\; 0$$

$$[(p \rightarrow q) \wedge r] \rightarrow [(\neg r \vee p) \rightarrow q]$$

$$0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad \underline{\mathbf{1}} \quad 0 \quad 1 \;\; \underline{\mathbf{0}} \;\; 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

Bibliografia e risorse online

- Marcello Frixione, Come ragioniamo, Laterza, 2007
- Edward J. Lemon, *Elementi di logica*, Laterza, 2008
- W.V.O. Quine, *Manule di logica*, Feltrinelli, , 1980[6]
- E. Casari, *Lineamenti di logica matematica*, Feltrinelli, 1982
- Voce *Logica proposizionale* su Wikipedia