Corso di logica
Lezione 4

Matematica e logica

Breve introduzione storica

La crisi dei fondamenti della matematica ha radici molto antiche. Sin dalla sistemazione assiomatica di Euclide (*Stoichèia*, Elementi), alcuni geometri contestarono l'evidenza del Quinto postulato. La sua formulazione appariva complessa e, soprattutto, non altrettanto palesemente evidente come gli altri postulati.

I. Tra due punti qualsiasi è possibile tracciare una ed una sola retta
II. Si può prolungare un segmento oltre i due punti indefinitamente
III. Dato un punto e una lunghezza, è possibile descrivere un cerchio
IV. Tutti gli angoli retti sono congruenti tra loro

La formulazione originale infatti recita:

V. «Se una retta taglia altre due rette determinando dallo stesso lato angoli interni la cui somma è minore di quella di due angoli retti, prolungando indefinitamente le due rette, esse si incontreranno dalla parte dove la somma dei due angoli è minore di due angoli retti.»

Generalmente questo postulato è stato poi riformulato come «postulato delle parallele»: «Data una qualsiasi retta r ed un punto P non appartenente ad essa, è possibile tracciare per P una ed una sola retta parallela alla retta r data.»

Per gli antichi il concetto supremo cui attenersi per dimostrare il V postulato come teorema è dunque quello della mancanza dell'**evidenza**.
Nonostante ciò, tutti gli sforzi dei matematici antichi e moderni non sono riusciti a dimostrare il V postulato come teorema, dunque, può essere considerato a pieno titolo un «assioma» della geometria.
Interessante è la figura di Girolamo Saccheri (1677-1733) che pubblicò, lo stesso anno della morte, *Euclides ab omni naevo vindicatus*, un'opera nella quale il matematico gesuita voleva dimostrare una volta per tutte la valenza assiomatica del V postulato. Per la dimostrazione ricorse alla *reductio ad absurdum*, cioè alla tecnica grazie alla quale, negata una tesi, se ne traeva una contraddizione (un *absurdus*) e dunque, negando la negazione della tesi, si dimostrava la validità della tesi di partenza.
Prendiamo ora la riformulazione dell' «assioma delle parallele»:
Per un punto esterno ad una retta *r*, si può tracciare una e una sola retta parallela ad *r*.
Se lo neghiamo, otteniamo due possibili enunciati:

1) per un punto esterno ad una retta passa più di una parallela, oppure
2) non ne passa nessuna.

Saccheri passa poi a tentare di dimostrare che da questi due nuovi «assiomi», mantenendo la validità dei primi quattro, si giunge a conclusioni assurde. Comincia dunque a dimostrare teoremi derivanti dai due nuovi gruppi di assiomi: **A**. i quattro di Euclide (E4) + 1 e **B**. (E4) + 2).
Ad un certo punto della dimostrazione, egli si convinse di aver trovato assurdità tali da non poter accettare nessuno dei nuovi gruppi di assiomi. La tesi assiomatica di Euclide era dunque salva da qualsiasi tentativo di revoca in dubbio.

Le geometrie non euclidee

L'ironia del caso Saccheri è che, nonostante l'infondata convinzione dell'assurdità delle conclusioni, egli senza avvedersene aveva dimostrato i primi teoremi di geometrie non euclidee. In particolare:

E4+1 diverranno gli assiomi della cosidetta geometria *iperbolica* di (Bolyai) Lobačevskij (1792-1856);
E4+2: gli assiomi della geometria *ellittica* di Riemann (1826-1866).

Le due geometrie non euclidee vennero considerate, sulle prime, poco più che stravaganze puramente teoriche (benché il vecchio matematico Gauss disse di non aver pubblicato le sue ricerche su una geometria simile a quella del Bolyai, solo per non udire «le strida dei beoti»); nella seconda metà del XIX sec. tuttavia, la matematica stava subendo delle importanti trasformazioni e cominciavano ad essere prodotte considerazioni metamatematiche sulla struttura e le proprietà dei sistemi assiomatico-deduttivi: non appariva poi tanto strano che un matematico potesse scegliere un sistema di assiomi ipotetico e da questo trarre rigorosamente dimostrazioni deduttive di teoremi, indipendentemente dall'eventuale interpretazione di tali assiomi, che ne avrebbe anche determinato anche la validità concreta.

In pratica, si cominciava a pensare ad un sistema assiomatico che potesse svilupparsi deduttivamente in senso puramente sintattico, senza aver bisogno preventivamente di una interpretazione che rendesse ad es. l'assiomatizzazione di una geometria «valida» e cioè, secondo le teorie scientifiche del tempo, corrispondente allo spazio fisico (geometria fisica).
Nel 1905 e poi nel 1915 Einstein elaborò la sua *Teoria della relatività*. In particolare nel 1915 egli si servì degli strumenti matematici elaborati da Gauss, Riemann, Levi-Civita e Ricci-Curbastro per elaborare la *teoria della relatività generale*. In essa si prevedeva l'uso di una geometria non euclidea quadridimensionale a curvatura positiva (derivata da quella di Riemann).
Nel 1919, l'astrofisico A. Eddington, organizzò una spedizione in occasione di un'eclissi di Sole all'isola di Principe per verificare una delle conseguenze della teoria, e cioè la flessione dei raggi luminosi (di una stella) in presenza di forte campo gravitazionale (del Sole). L'esperienza fu verificata.
Una geometria non euclidea poteva, dunque, essere interpretata come geometria dello spazio fisico (sostituendo dopo secoli il paradigma dello spazio fisico come «euclideo»), modificando in modo irreversibile il concetto stesso di «evidenza».

Da questa breve storia, possiamo trarre una considerazione per quanto attiene all'argomento specifico di questo corso: durante il XX sec. assisteremo ad una «liberalizzazione» della matematica pura, nel senso che la scelta degli assiomi di un sistema **S** poteva essere, in certo senso, «arbitraria», poiché non era più necessario che **S** dovesse per forza essere interpretabile secondo l'evidenza del «senso comune» anche di tipo scientifico.

Teoria degli insiemi

Teoria *naïve* degli insiemi

Georg Cantor (1845-1918) cominciò ad elaborare la teoria matematica degli insiemi verso il 1874. La teoria a cui dette vita però, andò incontro a problemi causati da paradossi, e questi paradossi erano generati da una certa libertà ch'egli si concesse nell'elaborare le sue intuizioni. Successivamente ai lavori di Russell si cominciò a riferirsi alla teoria cantoriana come alla teoria *naïve* (ingenua) degli insiemi. Le posteriori teorie assiomatiche degli insiemi verrano formulate con maggiore attenzione, ponendo condizioni per gli assiomi.

Insiemi

Si definisce **insieme** (*set*) una qualsiasi collezione di oggetti detti *membri*.

Ad es. i numeri **0**, **1**, **2** sono membri dell'insieme **{0, 1, 2}**, che può anche essere definito **{*x* | *x* è un numero naturale < 3}**;

così, se in una stalla ci sono tre mucche, **Bianchina, La Rossa, Semiramide**, queste sono membri dell'insieme **{Bianchina, La Rossa, Semiramide}**, che può anche essere definito **{*x* | *x* è una mucca della stalla}**.

L'appartenenza di un membro ad un insieme si rappresenta col simbolo

$$\in,$$

la non appartenenza col simbolo

$$\notin.$$

Assioma di estensionalità

La natura di un insieme dipende da nient'altro che dai suoi membri. Essere membro x di un insieme A si scrive, in simboli, $x \in A$.

Se A e B sono insiemi,

Per ogni insieme A, B: A=B *sse* $\forall x\ (x \in A \leftrightarrow x \in B)$

Assioma di comprensione

L'assioma di estensionalità ci dice quando due insiemi sono identici (quando hanno esattamente gli stessi membri); ma quanti insiemi ci sono o possiamo costruire?

Se A è un insieme e C è una condizione che ci consenta di individuare o costruire un insieme,

per tutte le C, *esiste un insieme* A *tale che*

$\forall x\ (x \in \mathrm{A} \leftrightarrow x$ soddisfa C)

Assioma di estensione e *assioma di comprensione*, per quanto in Cantor non venissero esplicitati ma solo presupposti, danno vita alla citata teoria *ingenua* degli insiemi. Inoltre, l'assioma di comprensione ci conduce direttamente al paradosso di Russell e dunque non può essere vero.

Membri, insiemi e sottoinsiemi

Siano *x*, *y*, *z* membri dell'insieme A: diciamo che B è un sottoinsieme di A, quando

B = {*x*} **v** {*y*} **v** {*z*} **v** {*x*,*y*} **v** {*x*,*z*} **v** {*y*,*z*} **v** {*x*, *y*, *z*}

e indichiamo il rapporto tra A e B, col seguente simbolismo:

$$B \subseteq A$$

Quando l'insieme B è un sottoinsieme di A diverso da A, scriviamo

$$B \subset A$$

e lo diciamo sottoinsieme *proprio.*

Un sottoinsieme può essere un membro dell'insieme a cui appartiene. Nel concetto di insieme, infatti, non c'è nulla che impedisca ai membri di un insieme di essere a loro volta insiemi (ad es., lettere, parole, pagine, libro, biblioteca).

Algebra degli insiemi

Insieme vuoto: un insieme che non ha membri si indica con {} o con $\emptyset$; l'insieme vuoto è sottoinsieme di ogni insieme;

Unione: $A \cup B$ è l'insieme che contiene tutti i membri di A *oppure* di B;

Intersezione: $A \cap B$ è l'insieme che contiene tutti di membri che appartengono sia ad A che a B.

Complemento: L'insieme A – B: $\{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

Singoletto: Un insieme che contiene un solo membro. Matteo Renzi e {Matteo Renzi} non sono la stessa cosa: il primo è una persona, il secondo un insieme.

L'insieme di Russell

Nel 1902 Bertrand Russell inviò a Gottlob Frege, che stava sviluppando il suo programma formale di riduzione della matematica alla logica (programma detto: *Logicismo,* v. oltre) *via* la teoria degli insiemi di Cantor, una lettera: in essa, Russell informava il logico tedesco di aver costruito un insieme che portava ad un grave problema. Per capire di quale insieme si tratti, si fa riferimento ad una caratteristica degli insiemi: quella di poter essere *membri* di insiemi.

Così, dunque, avremo insiemi che sono membri di se stessi (come l'insieme di tutti gli insiemi che hanno più di un elemento, così come l'insieme di tutto ciò che non è un auto) e insiemi che non sono membri di se stessi (come l'insieme di tutti gli insiemi che hanno un solo elemento o l'insieme delle auto).

Il paradosso di Russell

Russell scrive: sia l'insieme
R=$\{x \mid x \notin x\}$.
Qui si scatena l'inferno *logicista* per Frege. Infatti, Russell si chiede: l'insieme R è un membro di se stesso oppure no?

(1) Supponiamo che R non sia membro di se stesso.
(2) Allora, poiché R contiene tutti gli insiemi che non sono membri di se stessi, R è un membro di se stesso.
(3) Ma (2) contraddice (1)
(4) Dunque, per *reductio ad absurdum*, concludiamo che (1) è falsa e che R è un membro di se stesso.
Possiamo ripetere il ragionamento sulla supposizione che R sia membro di se stesso, giungendo alla conclusione che R non è membro di se stesso.
Se diciamo, dunque, α la conclusione (4) e, ovviamente, $\neg\alpha$ l'opposta conclusione del secondo ragionamento, avremo $\alpha \wedge \neg\alpha$. Una contraddizione nel cuore della scienza rigorosa per antonomasia

Conseguenze del «paradosso» di Russell

Il cosiddetto «paradosso» di Russell è propriamente un'*antinomia*. Comunque la si intenda, tale risultato pone immediatamente in crisi il programma *logicista* (si veda oltre) ideato da Frege, ma in generale, getta anche un'ombra inequivocabile sulla consistenza dell'intera scienza matematica.

Per capire ciò consideriamo quello che può essere definito il «riduzionismo» matematico che aveva preso piede sin dalla creazione della *geometria analitica* da parte di Cartesio e che, durante il XIX sec., aveva intravisto un chiaro obiettivo risolutivo grazie alla teoria degli insiemi di Cantor e alla assiomatizzazione della aritmetica da parte di Giuseppe Peano.

Teoria assiomatica dell'aritmetica

Il «riduzionismo» matematico era cominciato con la geometria analitica e, soprattutto grazie al calcolo infinitesimale, aveva ricondotto tutte le strutture «geometriche», in ultima analisi, a strutture algebriche (dunque, numeriche). Adesso, grazie al lavoro di riduzione di molti matematici che andavano cercando di ricondurre le strutture algebriche superiori a forme sempre più «semplici», si arrivava a formulare la teoria che tutta quanta la matematica poggiasse le sue fondamenta sull'aritmetica (scorgiamo un sorriso sulle labbra di Pitagora).

Giuseppe Peano elaborò una celebre assiomatizzazione dell'aritmetica che porta il suo nome.

A1. $\exists x\ (x \in N)$ (ad es. 0 o in alternativa 1)

A2. $\exists \varphi \mid \varphi: N \rightarrow N$ (la φ rappresenta la funzione «successore di ...» da N su N)

A3. $\forall x \forall y (x \neq y) \rightarrow \varphi x \neq \varphi y$ *con* x, y, $\varphi \in N$

A4. $\forall x\ \varphi x \neq 0$

A5. (*Principio d'induzione matematica*) Se A è un sottoinsieme di N tale che:

a. $0 \in N$

b. $\forall x (x \in A \rightarrow \varphi x \in A)$

allora A=N

La crisi dei fondamenti

Poniamo allora che sia possibile ricondurre la matematica all'aritmetica e questa alla teoria degli insiemi.

Che ne è del paradosso di Russell?

Bene, possiamo dire che seguendo l'intuizione che ci ha consentito di creare la teoria naïve degli insiemi siamo condotti alla antinomia di Russell: l'unica soluzione per non compromettere non solo il programma logicista, ma la stessa consistenza logica dell'intera scienza matematica, è quella di predisporre una teoria assiomatica degli insiemi, che eviti il formarsi di tale antinomia. Russell, negli anni successivi alla scoperta dell'antinomia, elaborerà una teoria assiomatica delle classi (insiemi), che peraltro lo condurrà a proseguire il programma logicista di Frege. Tale teoria assiomatica si fonda sulla cosiddetta «teoria dei tipi logici», che poi verrà estesa, su indicazione di Ramsey, nella «teoria dei tipi ramificata». L'assiomatizzazione di Russell e la stessa teoria dei tipi verrà però profondamente criticata per ragioni logiche e filosofiche.

La teoria assiomatica degli insiemi ZF e ZFC

Non si può esporre qui la teoria assiomatica detta di Zermelo-Fränkel (ZF), per la quale esposizione rimandiamo direttamente alla pagina di Wikipedia
https://it.wikipedia.org/wiki/Teoria_degli_insiemi_di_Zermelo-Fraenkel
Ma possiamo sottolineare alcune cose:
(1) «Sebbene la maggioranza dei metamatematici creda che questi assiomi siano coerenti (nel senso che da essi non deriva alcuna contraddizione), questo non è dimostrato. Essi sono da molti ritenuti le fondamenta della matematica ordinaria e la loro coerenza non può essere provata dalla matematica ordinaria, come dimostrato da Gödel con il suo celebre secondo teorema di incompletezza.»
(2) «Il tentativo riduzionista dei logici di rifondare tutta la matematica moderna su basi insiemistiche si è scontrato con il fatto che alcuni risultati importanti basilari non sono dimostrabili con i soli assiomi di Zermelo. È quindi necessario aggiungere l'assioma della scelta, e il nuovo sistema formale che ne risulta viene solitamente chiamato ZFC, dove la "C" sta per "choice" ("scelta").»
(3) «Nel 1938 Kurt Gödel costruì un modello basato sulla ZF in cui l'assioma della scelta è valido (il modello è noto come Universo degli insiemi costruibili).In tal modo egli dimostrò che se ZF è coerente, lo è anche ZFC (l'unione degli assiomi della ZF e dell'assioma della scelta). Basandosi su tale presupposto, e sull'ipotesi, solitamente data per vera, che ZF sia coerente, i logici hanno visto nella ZFC la possibilità di fondare tutta la matematica su basi insiemistiche, dato che l'assioma della scelta si rivela indispensabile per raggiungere tutta una serie di risultati molto importanti (come l'esistenza di una base per un dato spazio vettoriale). Per questo motivo, nonostante tale assioma porti anche a risultati controintuitivi (come l'insieme di Vitali e il paradosso di Banach-Tarski), esso viene solitamente considerato vero.
Si è dovuto aspettare però il 1964 perché Cohen dimostrasse l'indipendenza dell'assioma della scelta dagli assiomi di Zermelo-Fraenkel (ovvero che se ZF è coerente anche ZF¬C, l'unione degli assiomi della ZF e della negazione dell'assioma della scelta, lo è). In tal modo egli provò che effettivamente ZF e ZFC non sono la stessa cosa: la sua dimostrazione si basa sulla creazione di un modello in cui valgono tutti gli assiomi di ZF e la negazione dell'assioma della scelta.

Logicismo

Dopo lo scacco del logicismo fregeano, proprio Russell si occuperà di sostenere la dottrina logicista in modo ancor più radicale, inserendo anche la geometria tra i candidati ad una possibile riduzione alla logica (Frege sosteneva il riduzionismo per l'aritmetica, non per la geometria).

In primis, il tentativo russelliano doveva predisporre una soluzione all'antinomia dello stesso Russell. Per fare questo egli elaborò la «teoria dei tipi logici» (evolutasi poi nella «teoria ramificata dei tipi» che incontrerà, però, problemi innumerevoli sia logico-matematici che filosofici e verrà infine abbandonata).

La teoria dei tipi parte dalla constatazione che si deve evitare, nella formulazione del sistema di assiomi, che si possa arrivare a formare un insieme come $\{x \mid x \notin x\}$ da cui deriva l'antinomia.

I *tipi* sono gerarchie di livelli degli enti logici, organizzati dai più semplici ai più complessi, definiti riferendosi ad enti già dati. (Livello 0: gli elementi. Livello 1: gli insiemi di elementi. Livello 2: gli insiemi di insiemi di elementi. E così via).

Platonismo

Platonismo: (1) gli insiemi sono entità che esistono indipendentemente dai pensieri e costrutti umani, e benché astratti, sono ritenuti parte di una realtà oggettiva, esterna; (2) gli insiemi infiniti quali quelli dei numeri naturali e dei numeri reali sono ritenuti esistenti come oggetti completi, in atto; (3) per ciascun insieme, la totalità dei sottoinsiemi arbitrari di quell'insieme esiste come insieme completo, ben definito; (4) ogni proposizione intorno agli insiemi ha un valore di verità definito (vero o falso), indipendente dai modi con cui noi possiamo verificarlo.

Il *formalismo* e il programma di Hilbert

David Hilbert (1862-1943) elaborò una lista dei ventitré principali problemi non risolti, nella sua famosa conferenza al Congresso internazionale dei matematici del 1900: i primi due riguardavano i fondamenti della matematica: precisamente, il problema del continuo e la coerenza di un sistema assiomatico per i numeri reali. Il programma di Hilbert per stabilire la coerenza dei sistemi assiomatici venne espresso per la prima volta in termini più specifici nel II problema, in cui richiedeva una dimostrazione della coerenza di un sistema d'assiomi per i numeri reali. Per lui, la fondazione di una qualsiasi scienza deve fornire un sistema esatto e completo di assiomi; inoltre, un concetto matematico esiste se, e soltanto se, un tale sistema di assiomi può essere mostrato come non contraddittorio.

Il formalismo sostiene che gli enunciati matematici possono essere pensati come affermazioni intorno alle conseguenze di certe regole di manipolazione di stringhe. Per esempio la geometria euclidea viene considerata come un "gioco" che si basa sopra alcune stringhe chiamate "assiomi" e alcune "regole di inferenza" e consiste nel generare nuove stringhe dalle stringhe date mediante le regole; in tale gioco si può dimostrare il teorema di Pitagora, cioè si riesce a generare una stringa che corrisponde al suo enunciato.

Il programma di Hilbert prevedeva una completa e consistente assiomatizzazione di tutta la matematica. ("Consistente" qui significa che dal sistema non si può derivare alcuna contraddizione). Hilbert intendeva mostrare la consistenza dei sistemi matematici a partire dall'assunzione che fosse consistente la cosiddetta "aritmetica finitaria", un sottosistema della usuale aritmetica degli interi naturali, scelta in quanto non soggetta a controversie filosofiche.
La crisi del programma di Hilbert emerse nel 1931 dagli sbalorditivi risultati di Gödel in base ai quali se **T** è una qualsiasi teoria formale, presentata finitariamente e che contiene l'assiomatizzazione dell'aritmetica di Peano (PA), la consistenza di **T** non può essere dimostrata con metodi che possano essere formalizzati in **T**, a meno che **T** non sia già essa stessa incoerente.
Sia il programma logicista che quello formalista incontravano, con i teoremi di incompletezza di Gödel, una brusca quanto inaspettata battuta d'arresto (e con tutta probabilità il fallimento definitivo, a meno di rielaborazioni piuttosto profonde)

Costruttivismo e intuzionismo

Il costruttivismo è una concezione che ha a che fare con la pratica matematica che rifiuta le definizioni impredicative (v. supra). La distinzione tra definizioni predicative e impredicative fu elaborata da Henri Poincaré (1854-1912). Egli riteneva che il sistema dei numeri naturali fosse direttamente comprensibile e che il principio di dimostrazione per induzione fosse sanzionato dall'intuizione e non richiedesse una riduzione a qualcosa di più basilare. A partire dal 1905, egli avviò un attacco incessante ai programmi insiemistici e logici per la fondazione della matematica, e specialmente al programma logicista, non vedendo alcun bisogno di ridurre la nozione di numero naturale a concetti logici. L'attacco di Poincaré alla teoria degli insiemi poggiava su una concezione della natura della matematica fondamentalmente opposta a quella di Cantor. Secondo Poincaré tutte le nozioni matematiche hanno la loro fonte nell'intuizione o sono ottenute da essa mediante definizione esplicita. **Gli oggetti matematici non hanno un'esistenza platonica indipendente, come sembra si debba richiedere per giustificare i principî insiemistici, e in particolare non ci sono totalità infinite.** Con questa filosofia 'definizionista' della matematica, Poincaré arrivò alla sua analisi dei paradossi e alla proscrizione delle definizioni impredicative: bisogna fare attenzione a distinguere definizioni apparenti da quelle che lo sono realmente. Le definizioni impredicative si caratterizzano per il fatto che pretendono di isolare un oggetto da una totalità facendo riferimento in modo essenziale (o esplicitamente o implicitamente) a quella totalità. Se questo procedimento è concepito come la 'creazione' di un tale oggetto mediante una definizione, si viola il requisito che il *definiens* debba, in tutti i suoi aspetti, essere precedente al *definiendum*.

L. E. J. Brouwer (1881-1966)

«Per un insieme **finito** A e per una proprietà P **decidibile** possiamo verificare $\exists x Px \vee \forall x \neg Px$ controllando volta per volta ciascun $x \in A$ per vedere se vale o no Px. In generale non c'è alcuna maniera di eseguire una tale verifica quando A è infinito, anche se P è decidibile».

Questa affermazione è basata per Brouwer su una concezione della matematica basata sull'intuizione e sulle capacità della mente di sviluppare con essa e con essa sola la scienza matematica. In particolare, l'aritmetica si fonderebbe, kantianamente, sull'intuizione pura del tempo.

Logica intuizionista

Per quanto riguarda i rapporti tra logica e matematica, gli intuizionisti sono del parere che non può essere la logica a fondare la matematica (poiché questa, in ultima analisi, si basa su una intuizione irriducibile), quanto piuttosto è l'inverso: dallo studio del modo effettivo in cui la mente (o la ragione) umana costruisce, sulla base dell'intuizione di tempo, gli oggetti matematici (innanzitutto i numeri naturali) dipende la stessa forma logica. Si tratterà però, stante la prospettiva costruttivista e il linea di principio finitaria, di produrre una logica che sia cogente con tale prospettiva.

Incompletezza della matematica

I risultati dei due teoremi di incompletezza di Gödel del 1931, porranno termine a due programmi: il logicista e il formalista:

Il **Primo Teorema di incompletezza** di Gödel dice che:

In ogni teoria matematica T sufficientemente espressiva da contenere l'aritmetica, esiste una formula α tale che, se T è coerente, allora né α né la sua negazione $\neg\alpha$ sono dimostrabili in T.

Con qualche semplificazione, il primo teorema afferma che:

In ogni formalizzazione coerente della matematica che sia sufficientemente potente da poter assiomatizzare la teoria elementare dei numeri naturali (vale a dire, sufficientemente potente da definire la struttura dei numeri naturali dotati delle operazioni di somma e prodotto) è possibile costruire una proposizione sintatticamente corretta che non può essere né dimostrata né confutata all'interno dello stesso sistema.

Secondo teorema di Gödel

Sia T una teoria matematica sufficientemente espressiva da contenere l'aritmetica: se T è coerente, non è possibile provare la coerenza di T all'interno di T.

Con qualche semplificazione,

Nessun sistema coerente può essere utilizzato per dimostrare la sua stessa coerenza.

Dal secondo teorema si stabilisce il fallimento del programma di Hilbert di dimostrare la coerenza di una teoria assiomatica T per l'aritmetica elementare;

uno dei risultati del primo teorema è, tra gli altri, il fallimento del programma logicista: si può infatti vedere che se l'aritmetica è incompleta (cioè in essa devono esistere formule valide che non sono dimostrabili), la logica proposizionale e predicativa invece lo sono (come del resto si può anche dimostrare che siano coerenti). Un sistema teorico «incompleto» non puo essere ridotto ad uno che sia «completo»; così come un sistema che non può essere dimostrato coerente ricondursi ad uno in cui invece la coerenza sia dimostrabile.

Gödel e la fine del sogno leibniziano?

L'incompletezza della matematica dimostrata da Gödel ha sollevato, come immaginabile, una ridda di questioni filosofiche. Alcuni vi hanno visto, a partire dallo stesso Gödel, la conferma della realtà *platonica* degli enti matematici, per quanto tale platonismo si differenzi da quello logicista per la dimostrata non riducibilità della matematica alla logica. Altri ne hanno concluso che una presentazione puramente *formalistica* (sintattica) della matematica, non è sufficiente e si deve sempre accompagnare tale presentazione assiomatica con almeno alcuni modelli interpretativi (semantica). Altri ancora si sono rivolti con maggiore convinzione verso una concezione *intuizionista* o *costruttivista* della matematica (per quanto anch'essa presenti considerevoli problemi nella costruzione delle varietà più astratte dell'analisi).

Resta il fatto che il risultato di Gödel, in un senso ampiamente filosofico, sembra essere il *Requiem* per il sogno leibniziano della *mathesis universalis*. La mente umana che riesce a pensare la matematica, pone in essa, sin dai suoi assiomi, un potere espressivo tale che non tutte le sue proposizioni vere sono derivabili come teoremi.

In pratica, la capacità di pensare assiomi per l'aritmetica propria della mente umana non può essere riprodotta secondo un modello automatico. Questo ha sollevato ulteriormente questioni di tipo metafisico sull'esistenza dell'anima, sul libero arbitrio, sul determinismo, sull'ontologia degli enti fisici e matematici. Ma ha posto anche questioni logiche sulla capacità degli elaboratori elettronici di riprodurre la complessa varietà della razionalità umana (sempre che la razionalità umana si possa considerare come operante indipendentemente da fattori, storici, personali, culturali, psicologici, sociali, emotivi, ecc.).

Bibliografia

Innanzitutto per avere un quadro storico articolato, ma generale, della questione dei fondamenti della matematica, si consiglia di consultare il testo dei coniugi Kneale, *Storia della logica*, Einaudi, capp. VI-X, *cit*.

- Matteo Plebani, *Introduzione alla filosofia della matematica*, 2011, Carocci
- Carlo Cellucci, *La filosofia della matematica del Novecento*, 2007, Laterza
- E. Nagel, J.R. Newman, *La prova di Gödel*, 2013, Bollati Boringhieri

Appendice sui testi di logica per concorsi:

- Carlo Tabacchi, *I test di logica per tutti i concorsi*, 2015, Alpha Test

Bibliografia e risorse online

A livello introduttivo si veda, ad esempio:

- Gabriele Lolli, *Guida alla teoria degli insiemi*, 2008, Springer

Per un approfondimento filosofico e logico-matematico si veda:

- Hao Wang, *Dalla matematica alla filosofia,* 1984, Boringhieri, specialmente cap. 6.
- http://tinyurl.com/hw5kvjp
- http://tinyurl.com/jxlbw2x