




La logica filosofica. Modalità, logiche non classiche, induzione

Prof. Stefano Ricci

- 
- La logica modale si occupa dei «modi» in cui qualcosa può essere: se pensiamo alle proposizioni, ad esempio, esse potranno essere, oltre che vere o false - come c'insegna la logica formale classica -, anche, poniamo, *necessariamente* vere o false, o *possibilmente* vere/false, oppure, potremmo *sapere* o non *sapere* se siano vere o false, o, ancora, *obbligatorie* o *permesse*, o *temporalmente* vere o false. Ma potremmo avere anche, ad esempio, una predicazione necessaria/possibile di una proprietà ad un soggetto e così via.
 - La logica modale di cui ci occuperemo è quella che ha a che fare con la coppia necessario/possibile nel senso più ampio detto anche senso «logico». La modalità di tipo logico è anche detta *aletica* poiché ha a che fare con il concetto di verità (*alètheia*), sebbene non possa essere interpretata (per ciò che concerne le proposizioni) come vero-funzionale.

Da questo possiamo trarre la considerazione che i termini come necessario e possibile non si comportano in modo vero-funzionale; questa constatazione è confermata da un tentativo, destinato al fallimento, di costruire una tabella di verità per p e le sue modalità.

Introduciamo i moderni operatori modali:

\diamond per *possibile*, e
 \square per *necessario*.

Leggeremo $\diamond p$ come «È possibile che p » e $\square p$ come «È necessario che p ».

p	$\diamond p$	$\square p$
1	1	?
0	?	0

Nel *De Interpretatione*, negli *Analitica Priora* e *Posteriora*, nonché nella *Metafisica*, e in alcuni passi di opere minori, egli affronta la questione della possibilità e della necessità.

«Diciamo inoltre necessario che sia così com'è, quel che non può essere altrimenti». *Metafisica*, Δ , 5.

La logica megarico-stoica ha riflettuto sul concetto di necessità/possibilità. In particolare, assumendo gli stoici una metafisica fondamentalmente *determinista* della realtà, essi discussero molto della struttura necessaria delle verità. Con Crisippo vi sarà una elaborazione del concetto di *implicazione* («Se ... allora ...»). L'implicazione *filoniana* (*materiale*) non considerava l'esistenza di una connessione necessaria tra antecedente e conseguente (generando tra gli altri i famosi paradossi); Crisippo introdusse quella che in seguito verrà definita implicazione formale, o *implicazione stretta*, secondo cui è impossibile che l'antecedente sia vero e il conseguente falso; nella simbologia moderna si tratta di interpretare l'implicazione stretta come

$\Box (p \rightarrow q)$.

Inoltre, pare che Crisippo, coerentemente con il determinismo stoico, e seguendo un'impostazione tipica del megarico Diodoro Crono, ritenesse che possibile sia semplicemente ciò che non si è ancora verificato (ma, se *possibile*, necessariamente lo sarà): come dire $\Diamond p \rightarrow \Box p$ (che filosoficamente corrisponde al determinismo).

Interdefinibilità degli operatori modali

$$\Box p =_{def} \neg \Diamond \neg p$$

$$\Diamond p =_{def} \neg \Box \neg p$$

Il significato delle modalità veniva, in antichità, spesso riferito a questioni temporali: diciamo che Passato e Presente sono irreversibilmente dati (necessari) laddove il futuro è possibile. Detto altrimenti, chi dicesse una verità necessaria la intenderebbe «valida in tutti i tempi», mentre il possibile sarebbe ciò che è «valido in alcuni tempi» (generalmente, am non solo, futuri):

$$\Box p = \forall t (p \text{ è vero a } t)$$

$$\Diamond p = \exists t (p \text{ è vero a } t)$$

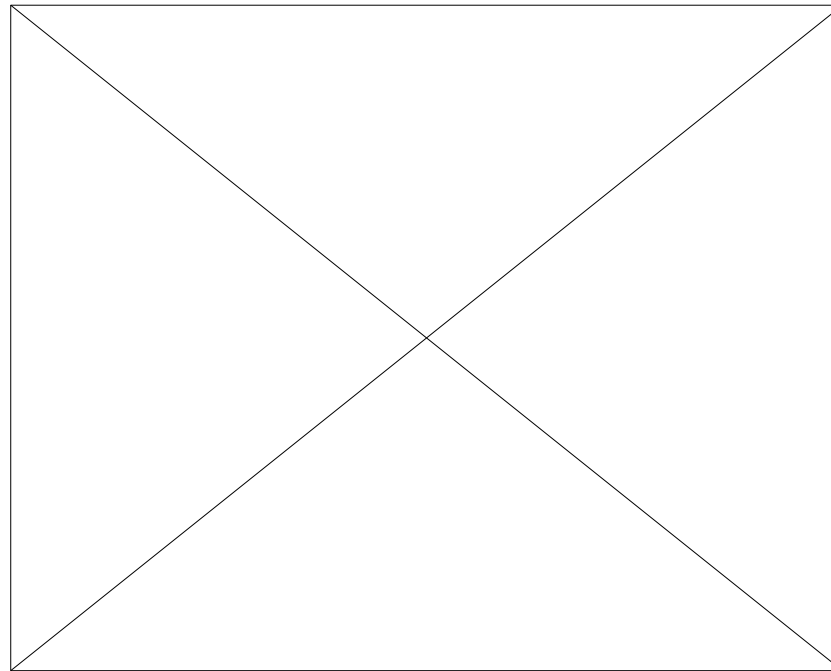
Il quadrato logico modale

Necessario

$\Box p$
 $\neg \Diamond \neg p$

Impossibile

$\Box \neg p$
 $\neg \Diamond p$



$\neg \Box \neg p$
 $\Diamond p$

Possibile

$\neg \Box p$
 $\Diamond \neg p$

Contingente

La vera svolta nella concezione modale si avrà con la Scolastica ed in particolare con **Duns Scoto** (1266-1308): «se prima della creazione del mondo ci fosse stato un qualche intelletto che avesse composto 'essere' con 'mondo', la proposizione 'il mondo può essere' sarebbe stata vera, come pure la proposizione '*il mondo è possibile*' [...], e la causa di ciò non è se non la natura dei termini, poiché i termini sono fatti in modo che non **ripugnano**» ('possibilità logica' o possibilità come mera **non impossibilità**).

Leibniz, ad esempio, assumerà come data questa posizione ed anzi introdurrà, proprio in continuità con tale concezione della possibilità, la teoria secondo la quale Dio, nel predisporre alla creazione, avrebbe anzitutto considerato (dovremo pensare, in modo logico) le varie alternative possibili del mondo da creare: in pratica avrà comparato nella sua mente i vari «mondi possibili» e anche quelli *compossibili*, per poi procedere secondo il suo divino criterio, a scegliere il migliore tra essi.

Possibile è un *mondo* in cui non sia possibile contraddizione, e, se prendiamo due mondi possibili w e v , essi sono *compossibili* sse non sia possibile dalla loro *unione* ricavare, per qualsiasi proposizione α , $\alpha \wedge \neg\alpha$.

Grazie alla definizione formale di «mondo possibile», che verrà sviluppata nel XX sec., sarà possibile fornire una interpretazione rigorosa e matematicamente soddisfacente delle modalità aletiche.

I sistemi modali

Fu proprio lavorando sui paradossi dell'implicazione materiale e sull'implicazione stretta, che C. I. Lewis (1883-1964) pervenne alla formulazioni di alcuni sistemi assiomatici di logica modale (1918 e 1932).

Il problema dei sistemi S1-S5 è che fino alla fine degli anni Cinquanta, per quanto avessero una formulazione sintatticamente e matematicamente convincente, non possedevano una perspicua (e filosoficamente plausibile) interpretazione semantica.

A ciò contribuì in maniera essenziale Saul Kripke con la cosiddetta semantica a «mondi possibili».

Sistemi T, S4, S5

Soprattutto i due sistemi S4 e S5 hanno generato un consistente interesse, sia matematico che filosofico, sino ad oggi. S4 e S5 sono il punto di partenza di quella che viene chiamata logica modale *normale*.

Alcune condizioni del discorso modale devono essere comunque rispettate (anche in assenza di una semantica rigorosa), almeno a livello intuitivo.

A causa del significato degli operatori modali deve essere garantita la validità delle seguenti leggi (considerate intuitivamente valide):

1. $\Box p \leftrightarrow \neg \Diamond \neg p; \Diamond p \leftrightarrow \neg \Box \neg p.$
2. $\Box(p \rightarrow q) \leftrightarrow \neg \Diamond (p \wedge \neg q)$
3. $\Box p \rightarrow p; p \rightarrow \Diamond p$
4. $[\Box p \wedge \Box(p \rightarrow q)] \rightarrow \Box q$

T, S4, S5 proposizionali

Il sistema di logica modale proposizionale più debole che soddisfi le condizioni intuitive appena enunciate, è detto sistema T (esposto da R. Feys nel 1937).

Ogni fbff di PC è una fbf di T. Gli **assiomi** peculiari di T sono:

T1. $\Box p \rightarrow p$

T2. $\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$.

Regole di trasformazione: tutte le regole di PC più:

TR1. *Regola di necessitazione (N):* Se α è una *tesi*, allora $\Box\alpha$ è una *tesi*. (**Occhio a non confondere questa regola metalinguistica con la formula *invalida* $\alpha \rightarrow \Box\alpha$. Perché?**)

Il sistema S4 proposizionale ha la base assiomatica di T più:

S4.A: $\Box p \rightarrow \Box \Box p$

Questo assioma è tuttavia difficilmente esprimibile in senso intuitivo: cosa vuol dire che una verità è necessariamente necessaria? Il problema è controverso e rappresenta quella che Quine definirà «opacità» referenziale del contesto modale. Come sostengono Hughes e Cresswell nella loro *Introduzione alla logica modale*:

«[...] è un punto di vista quantomeno rispettabile e plausibile quello per cui si dovrebbe rispondere affermativamente [al fatto che **S4.A** sia vera]: è plausibile, cioè, tener fermo che ogniqualvolta una proposizione è vera per necessità logica non si stratta mai di un fatto accidentale [contingente] ma sempre di qualcosa che logicamente non può mancare di essere così com'è. Non intendiamo, comunque, venire qui a capo del problema in modo definitivo: il fatto che molti metterebbero in discussione la validità di [**S4.A**] è quanto basta per giustificare la costruzione di un sistema, più forte di T, in cui questa formula sia una tesi, e per vedere come si configurerebbe tale sistema.» (p. 62)

Peraltro in S4 è un teorema anche che $\Box \Box p \rightarrow \Box p$, visto che questo è una tesi di T (Assioma T1) per sostituzione ($\Box p/p$); quindi potremo scrivere in S4:

$$\vdash \Box p \leftrightarrow \Box \Box p$$

Risulta evidente perciò che in S4 vale la *legge di riduzione* che consente di ridurre tutte le modalità consecutivamente iterate a semplici modalità (ad esempio, « $\Box\Box$ » a « \Box », « $\Diamond\Diamond$ » a « \Diamond », ma anche « $\Box\Box\Box$ » a « \Box » e così via). Questo dovrebbe anche togliere ogni dubbio sul «necessariamente necessario».

Aggiungendo alla base di T, l'assioma

$$\mathbf{S5.A:} \Diamond p \rightarrow \Box \Diamond p$$

che dà luogo al sistema S5 proposizionale.
Alcuni teoremi di S5:

$$\mathbf{S5.T1:} \Diamond p \leftrightarrow \Box \Diamond p$$

$$\mathbf{S5.T2:} \Box p \leftrightarrow \Diamond \Box p$$

C'è da notare che **S4.A** non è un assioma di S5, ma può essere derivato come teorema in S5.

$$\mathbf{S5.T3[=S4.A]:} \Box p \rightarrow \Box \Box p$$

Questo significa che S5 «contiene» S4.

Possiamo concludere dicendo che, intendendo il segno "<<" come «modalmente più debole», $T \ll S4 \ll S5$.

Interpretazione della logica modale proposizionale

Sia W un insieme di oggetti di qualche tipo (spesso si dicono *mondi* gli oggetti di W). Siano $w_1, w_2, \dots, w_i, \dots$, i membri di W . Sia data una relazione diadica R definita sopra i membri di W . Sia stabilita inoltre una assegnazione V di valori di verità ad una fbf α , che indicheremo con $V(\alpha)$. A differenza del PC, tuttavia, non potremo assegnare 1 o 0 *simpliciter* a $V(\alpha)$, ma dovremo affermare l'assegnazione di 1 o 0 a $V(\alpha)$ *relativamente ad un membro di W* .

Diremo perciò, $V(\alpha) = 1$ (o 0) relativamente a (o «in») w_i e scriveremo $V(\alpha, w_i) = 1$ oppure $V(\alpha, w_i) = 0$.

Per valutare la validità di una fbf qualunque, dobbiamo stabilire, innanzitutto, l'assegnazione di valutazioni di verità relativamente ai vari membri di W . Intanto, sappiamo che la valutazione di \neg (*non*) e di \vee (*o...*, *disgiunzione*) sono le consuete assegnazioni del PC: $V(\neg\alpha) = 1$ sse $V(\alpha) = 0$; $V(\alpha \vee \beta) = 1$ sse non si dà mai il caso che $V(\alpha) = 0$ e $V(\beta) = 0$; in caso contrario $V(\alpha \vee \beta) = 0$. Queste valutazioni *devono estendersi a tutti i membri di W* .

La valutazione di \Box (*necesse est*) dipenderà invece dall'assegnazione a membri di W : con ciò definiamo $V(\Box\alpha, w_i) = 1$ sse $\forall w_j [(w_i R w_j) \rightarrow V(\alpha, w_j) = 1]$. Quando la relazione tra mondi R è solo **riflessiva** (una relazione è *riflessiva* quando per tutti gli x , xRx), diciamo che tali condizioni rappresentano un modello del sistema T. Non abbiamo bisogno di altre condizioni per valutare la validità di una formula di T

Se la relazione R fosse anche **transitiva** (una relazione si dice *transitiva* sse per ogni x, y e z , se xRy e yRz allora xRz) avremo un modello per il sistema S4. Quando la relazione R fosse anche **simmetrica** (una relazione si dice *simmetrica* sse per ogni x, y , se xRy allora yRx), oppure se non avessimo affatto una relazione R , avremo un modello per il sistema S5.

Interpretazione a *mondi possibili*

Abbiamo definito la validità di una formula come la sua validità in ognuno dei mondi di ogni modello appropriato: l'espressione «mondo» per intendere un oggetto $w \in W$ riprende l'idea originale di Leibniz di *mondo possibile*, e molti logici la impiegano correntemente (soprattutto dopo Kripke). Originariamente fu introdotta, nel senso tecnico moderno, da Rudolf Carnap nella celebre opera *Meaning and Necessity* (1947), benché egli preferisse l'espressione «stato di cose» possibile o immaginabile o «descrizione di uno stato del mondo». Peraltro, l'analisi a «mondi possibili» della modalità consente a Carnap di distinguere significato e valore intensionale e estensionale di una espressione.

L'intensione di un'espressione è una funzione che associa valori di verità a mondi possibili, mentre l'estensione è l'insieme delle cose denotate dall'espressione (quindi o oggetti e persone concrete o classi o valori di verità): il criterio di identità per p e q che ne desumiamo, quindi, consiste, per le proposizioni, nell'avere la stessa intensione ovvero la stessa funzione che denota gli stessi valori di verità negli stessi mondi possibili. In particolare, il sistema S5, con il suo modello, sembra esprimere in modo più diretto l'intuizione leibniziana che una verità necessaria è quella valida in tutti i mondi possibili (per Carnap, in tutti gli stati di cose ipotizzabili). Per il sistemi T ed S4 e loro interpretazioni invece, la necessità deve essere relativizzata alla relazione R (sia essa solo riflessiva oppure anche transitiva): cioè esprimere una verità come *necessaria in un dato mondo* w_i , in tali sistemi, significa che essa deve essere valida in tutti i mondi w_j tali che valga R considerata come relazione di **accessibilità**. In altre parole, in T o S4, una verità è necessaria in un mondo w_i quando è valida anche in ogni mondo *accessibile* da w_i .

[Esempio, Cervantes e Don Quijote]

Mondi possibili e modalità: un approccio intuitivo.

Di fatto la semantica a mondi possibili introdotta da Kripke alla fine degli anni Cinquanta del secolo scorso (ma sviluppata contemporaneamente in una semantica simile da J. Hintikka), cattura in modo estremamente rigoroso un'interpretazione dei mondi possibili come chiave interpretativa della modalità: peraltro, avevamo già notato una analogia tra operatori modali e quantificatori, che consentirà poi lo sviluppo della semantica kripkeana.

In modo intuitivo, potremmo dire che «è necessariamente vero» significa nient'altro che «vero in tutti i mondi possibili», laddove «è possibilmente vero» significa «vero in alcuni mondi possibili». Più formalmente potremo stabilire le seguenti definizioni:

Sia $w \in W$ un qualsiasi «mondo possibile» (potremmo anche parlare di «possibile stato di cose», o di un «insieme massimale di proposizioni non contraddittorie non necessariamente attuali»):

$$\Box \alpha =_{def} \forall w [V(\alpha, w) = 1]$$

$$\Diamond \alpha =_{def} \exists w [V(\alpha, w) = 1]$$

Opzioni metafisiche sui mondi possibili

Realismo modale

Realismo modale «genuino». Secondo David K. Lewis i mondi possibili esistono realmente:

«[I]l nostro mondo, inteso in senso lato come l'entità che si estende intorno a noi nello spazio e nel tempo, è solo uno tra molti altri. Questa tesi potrebbe essere legittimamente considerata del tutto implausibile se non fosse stata difesa con intelligenza e sistematicità da Lewis soprattutto nell'opera *On the Plurality of Worlds*. [...] [E]gli propone un ragionamento per analogia: come in matematica dalla postulazione di entità che possono essere considerate ontologicamente problematiche come gli insiemi deriva un grande numero di irrinunciabili vantaggi, così dalla postulazione dell'esistenza di mondi possibili deriverebbero tali e tanti vantaggi, e per così svariate aree del dibattito filosofico, da renderli assai desiderabili.» (V. Morato, «Mondi Possibili», in M. Ferraris (a cura di), *Storia dell'ontologia*, 2008, pp. 641-42)

I mondi possibili pur esistendo realmente hanno alcune caratteristiche irrinunciabili secondo Lewis:

- sono isolati: ogni mondo possibile è spazio-temporalmente e causalmente separato e distinto da ogni altro;
- sono concreti: non sono entità astratte, ma entità concrete;
- l'insieme di tutti i mondi possibili esaurisce tutte le possibilità;
- attualità: ogni mondo è attuale, relativamente a se stesso.

Se ogni mondo è scollegato da qualsiasi altro, gli individui che lo abitano debbono essere diversi. Tuttavia, esiste una relazione che consente di parlare di individui che somigliano a quelli del nostro mondo: è la relazione di controparte.

Il realismo modale di Lewis è solo il più coerentemente radicale dei realismi modali: non esistono gli stessi individui nei diversi mondi possibili, ma solo controparti, individui che si assomigliano, ma sono diversi poiché appartengono ad un contesto «mondano» completamente distinto e separato. Non è stato, in poche parole, Obama a perdere le elezioni in un qualche mondo possibile w_i (o situazione controfattuale), ma la controparte di quell'oggetto che chiamiamo Obama nel mondo attuale $w_@$.

Sia il realismo modale «genuino» di D. Lewis sia la sua teoria delle controparti hanno sollevato molte discussioni filosofiche, come si può ben immaginare.

Realismo *ersatzista* o «attualista»: Alvin Plantinga ha proposto una forma di realismo modale detto «moderato» o «attualista»; fu lo stesso D. K. Lewis a introdurre il termine tedesco *Ersatz* (surrogato, sostituto) per definire la posizione, diversa dalla propria, secondo la quale esiste solo un mondo, quello attuale, e un infinito numero di entità *astratte* che rappresentano modi in cui il mondo attuale avrebbe potuto essere. Plantinga sostiene che esiste tutto ciò che è attuale: il nostro mondo che è un oggetto complesso e concreto, ma anche tutti i possibili stati di cose in cui tale mondo avrebbe potuto essere, essendo entità astratte, e dunque necessarie, esistono attualmente. In particolare, secondo Plantinga, vi sono le *essenze individuali (haecceitates)* che caratterizzano tutti gli enti possibili, anche quelli attualmente non esistenti, e sono codeste a consentirci di riconoscere gli oggetti nominati in un mondo possibile al di fuori dell'attuale.

Antirealismo modale: Il finzionalismo.

Il finzionalismo modale sostenuto da G. Rosen accetta che si parli di mondi possibili nel chiarimento e nell'utilizzo degli operatori modali, ma un enunciato che quantifichi su mondi possibili dovrebbe essere interpretato all'interno di un contesto finzionale, in cui la quantificazione avvenga nel campo d'azione di un operatore finzionale come «secondo la finzione (o ipotesi) f »: ad esempio, potremmo intendere $\Diamond \exists x Fx$ come: «secondo la finzione f esiste una cosa tale che essa ha F ». Il finzionalista non ritiene ontologicamente compromettente parlare di mondi possibili come di finzioni (o ipotesi).

Ognuna delle concezioni modali presentata pone, come è ovvio, dei problemi; per questo la discussione va tuttora avanti, con caratteristiche piuttosto interessanti sia dal punto di vista filosofico, ma anche da quello letterario (si pensi alla letteratura in generale, a quella fantastica e fantascientifica in particolare) come anche dal punto di vista linguistico e neurolinguistico.

Condizionali controfattuali e leggi di natura

Consideriamo l'asserzione

(1) Se Oswald non ha ucciso Kennedy, qualcun altro lo ha fatto
e poniamola a confronto con

(2) Se Oswald non avesse ucciso Kennedy, qualcun altro lo *avrebbe* fatto.

Mentre non dubitiamo per un istante della verità di (1), poiché è un fatto che Kennedy è stato ucciso, chi aderisse alla tesi della commissione Warren troverebbe discutibile, probabilmente falsa, l'asserzione (2). Dato che per la Commissione Warren Oswald aveva agito da solo, se ipoteticamente fosse stato impedito a Oswald di attuare il suo piano, allora Kennedy sarebbe sopravvissuto. Dato che Kennedy è morto, la (2) non può essere vera.

Chiamiamo i condizionali con protasi al modo congiuntivo (e apodosi al modo condizionale) **condizionali congiuntivi**: quando, come spesso accade nel comportamento linguistico, la protasi di un condizionale congiuntivo assume un'ipotesi che sappiamo falsa, si parlerà di **condizionale controfattuale**.

Sono del tutto evidenti le seguenti due cose:

1. La forma logica del condizionale controfattuale (d'ora in avanti semplicemente *controfattuale*) non potrà essere quella del condizionale materiale (implicazione filoniana): infatti $p \rightarrow q$ e inoltre assumiamo che $\neg p$, potremmo concludere veritativamente tanto q quanto $\neg q$, il che contraddice la nostra intuizione che solo una delle due possa essere vera;
2. Il controfattuale ha, di riffa o di raffa, a che vedere con mondi possibili o stati di cose alternativi e dunque dovrà ricorrere a nozioni modali per essere trattato.

Vari tentativi sono stati prodotti per addivenire ad un chiarimento logico dei controfattuali. Si rimanda per questi al testo di Claudio Pizzi in Bibliografia. L'importanza dei controfattuali non può essere sottovalutata: molti principî e leggi della fisica e della chimica, ad esempio, si possono esprimere opportunamente solo con controfattuali. L'esempio costantemente citato è il primo principio della dinamica newtoniana (principio d'inerzia di Galileo), esprimibile come:

(3) Se un corpo non *fosse* sottoposto a forze, *proseguirebbe* nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme.

Sappiamo che la protasi è universalmente falsa (non foss'altro che per la universale forza di gravitazione), ma *proprio grazie a ciò*, possiamo affermare l'apodosi in modo conveniente.

I controfattuali o comunque i condizionali congiuntivi risultano poi indispensabili nell'analisi delle cosiddette proprietà disposizionali, come «solubile», «infiammabile», ecc., tutte proprietà che necessariamente dovremo tenere nel conto per avere una visione scientifica adeguata. Ebbene un disposizionale come «solubile» si potrebbe rendere nel seguente condizionale congiuntivo:

(4) $\forall x$ (Se x fosse posto in acqua, x si scioglierebbe)

Se abbiamo così bisogno dei controfattuali e dei condizionali congiuntivi e se, d'altra parte, questi si possono trattare solo con concetti modali, questo pare essere un motivo ulteriore per occuparci filosoficamente e matematicamente della logica modale. Peraltro, lo sviluppo della logica modale per i controfattuali ha portato in modo del tutto naturale allo sviluppo di logiche della modalità fisica, epistemica, deontica, temporale, e così via.

Logica intuizionistica e logiche paracoerenti

Per i logici intuizionisti, la matematica è un'attività mentale dell'uomo (rifiutano il «platonismo» di altri logici e matematici). Non esiste un infinito attuale ma solo potenziale: i numeri primi, ad esempio, sono infiniti perché Euclide, negli *Elementi*, ne ha dato una definizione costruttiva. Ma se prendiamo i cosiddetti numeri primi gemelli (numeri primi che differiscono di 2: 3 e 5, 17 e 19, 41 e 43), ancora oggi i matematici non possono dimostrare che se $\alpha(x)$ esprimesse la proposizione $\exists y(\text{PR}(y) \wedge \text{PR}(y+2) > x)$, la formula $\forall x \alpha(x)$ esprime una verità non dimostrata. In pratica, non possiamo stabilire a priori se $\forall x \alpha(x) \vee \neg \forall x \alpha(x)$, dunque si deve rinunciare al principio del Terzo escluso. Ciò comporta anche problemi con la regola di dimostrazione per assurdo, e questo limita i poteri dimostrativi della logica intuizionista. (Esempi di Palladino, vedi Bibliografia).

Nella logica classica, come abbiamo visto, $\alpha \leftrightarrow \neg \neg \alpha$, il che vuol dire, sia che $\alpha \rightarrow \neg \neg \alpha$, sia che

$\neg \neg \alpha \rightarrow \alpha$.

Nella logica intuizionista (**LI**), vale il primo condizionale, infatti se α è dimostrato segue che non si dà il caso che $\neg \alpha$ sia dimostrato, mentre se non si dà il caso che $\neg \alpha$ sia dimostrato nulla possiamo dire sulla dimostrazione di α .

Quindi nella **LI** la legge della doppia negazione classica non vale. Da qui possiamo dire che la **LI** reinterpreta il significato di alcuni connettivi classici

Nell'ambito della logica predicativa intuizionistica non valgono le classiche equivalenze tra quantificatori. Ad esempio, laddove è **valida**

$$\neg \exists x \alpha(x) \rightarrow \forall x \neg \alpha(x)$$

poiché se sono riuscito a dimostrare che non esiste nessun x che α , segue che tutti gli x non saranno α ,

$$\neg \forall x \alpha(x) \rightarrow \exists x \neg \alpha(x)$$

non risulta valida, poiché se ho dimostrato che non tutti gli x sono α , non è detto che si possa dimostrare che esiste un x che $\neg \alpha$ (per fare quest'ultima cosa, dovremmo costruire l' x che non è α).

Nella **LI** è anche valida la **legge di Scoto**:

$$\neg \alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$$

cioè, se ho dimostrato che $\neg \alpha$, segue che si può dimostrare che α implica qualsiasi β

Concludiamo questa breve nota con una citazione da Palladino (Bibliografia):

«La logica intuizionista non è importante solo per il suo ruolo nell'ambito dei fondamenti della matematica. Il suo carattere costruttivo la rende particolarmente adatta a trattare fenomeni della più diversa natura da implementare sui calcolatori. Per questa ragione molte logiche sviluppate in tempi recenti per le loro applicazioni assumono una «base» intuizionista piuttosto che classica» (p. 131)

Da un punto di vista pratico, c'è un buon motivo per usare la logica intuizionista. Nella programmazione, infatti, delle mere asserzioni di esistenza sono poco interessanti. Un programma per computer è compilato per fornire una risposta, non per affermare che ne esiste (o non ne esiste) una. Sarebbe infatti strano che un sistema fornisse una dimostrazione per $\exists x P(x)$ ma non potesse provare $P(b)$ per qualsiasi b che non sia una variabile libera.

P.S. C'è da notare che se rinunciamo anche alla legge di Scoto, avremo la prima logica paracoerente, detta logica minimale.

Logiche paracoerenti

Se rinunciamo alla legge di Scoto $\neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$ il sistema di logica che otteniamo permetterà di derivare contraddizioni: un sistema «classico» che conduca a contraddizione viene detto *assolutamente inconsistente* o *banale (trivial)*. Le logiche paracoerenti, o paraconsistenti, sono state elaborate, a partire dalla seconda metà del XX sec., in modo che si possano derivare delle contraddizioni senza rendere banali le teorie. La logica minimale, che si ottiene dalla **LI** rinunciando alla legge di Scoto, è una logica che tende però alla banalizzazione. Sono stati sviluppati sistemi di logiche paracoerenti che pur ammettendo di poter derivare contraddizioni, non divengono perciò banali. Nelle logiche paracoerenti si mette in discussione lo stesso principio («il più saldo» secondo Aristotele) di non contraddizione.

Alcuni esempi (tratti da Palladino) di teorie che pur derivando contraddizioni non divengono banali: dimostrando contraddizioni si rende possibile la dimostrazione per assurdo; l'antinomia di Russell (ed altre contraddizioni alla base dei fondamenti della matematica) non ha reso banale la matematica stessa, ma ne ha consentito lo sviluppo (ad es. «teoria dei tipi»); nella fisica contemporanea le teorie spesso devono convivere con le contraddizioni:

«la teoria dell'atomo di Bohr è incoerente con la fisica classica: in base ad essa un elettrone orbitante non emette energia, mentre dalle equazioni di Maxwell segue che esso emette energia. Dato che ovviamente non se ne è dedotto qualsiasi cosa a proposito di elettroni, si è assunto un atteggiamento paracoerente. È abituale, inoltre, avere credenze contraddittorie e nelle stesse basi di dati dei calcolatori spesso si insinuano delle contraddizioni e non si vuole affatto dedurre qualsiasi proposizione»
(p.134)

La giustificazione dell'induzione

Kant aveva fornito una risposta al problema dell'uniformità della natura: nella ragione umana, sarebbe presente un principio **regolativo**, detto di *unità sistemica della natura*, che permetta, a livello trascendentale, di fare affidamento sulla uniformità e regolarità degli avvenimenti naturali, senza tuttavia indicare a quale grado essa sia uniforme. Per quanto tale giustificazione non consenta di costruire un determinato metodo induttivo, essa però non ne proibisce nessuno.

Tuttavia, il discredito in cui il kantismo era caduto in certi ambienti (**scientifici**, a causa della meccanica relativistica e quantistica, oltreché a causa della crisi dei fondamenti; e **filosofici**, a causa del riavvicinamento di certa filosofia continentale all'empirismo e alla logica matematica), poneva agli empiristi logici, avendo essi rinunciato alle giustificazioni trascendentali, il problema di *validare* l'induzione o per via empirica o per via pragmatica. Ma la critica humeana alla fiducia nell'induzione, sembrava rispuntare fuori, ad ogni giro di danza. Inoltre, il positivista Hempel e il filosofo analitico Goodman, posero alle moderne logiche induttive nuovi e peculiari problemi riguardanti l'induzione.

I paradossi moderni dell'induzione

C. G. Hempel (1905-1997): come facciamo a sostenere che «Tutti i corvi sono neri»?

Possiamo immaginare che chiunque risponderebbe immediatamente: perché tutti i corvi osservati sino ad ora sono neri, dunque probabilmente tutti lo sono. Nessuno di noi ha mai visto un corvo arancione ma, se non esaminiamo uno per uno tutti i corvi esistenti sulla faccia della terra, non potremo essere assolutamente certi che siano tutti neri. In realtà, ognuno di noi ha visto un numero ridotto di corvi neri, e induttivamente ha esteso il colore a tutti gli altri. Cerchiamo ora di trovare un modo per portare prove a sostegno della nostra ipotesi induttiva: tutti i corvi sono neri. Un modo, già accennato, consiste nell'andare a caccia di tutti i corvi esistenti sul pianeta: ogni ulteriore corvo nero sarebbe una prova a sostegno. Sarebbe certo un'impresa improba, non c'è un metodo più semplice? Potremmo provare a formulare un'affermazione logicamente equivalente a "tutti i corvi sono neri", che sia più facile da verificare, e cercare prove a suo favore. Bene, in effetti un'affermazione logicamente equivalente può essere «tutte le cose non nere sono non corvi».

Infatti $\forall x (Cx \rightarrow Nx)$ può convertirsi *simpliciter* per le leggi della LPC in $\forall x (\neg Nx \rightarrow \neg Cx)$ (Si veda la legge di trasposizione **PC6** della lezione 2). Da ciò si ricava, però, che una «scarpa bianca» diviene conferma che «Tutti i corvi sono neri».

Il problema di Hempel ha comunque a che fare con l'interpretazione meramente estensionale della logica deduttiva: in una prospettiva intensionale o modale la questione sarebbe affrontabile almeno in via di principio.

Diverso e più complesso il cosiddetto «new riddle of induction» sollevato da N. Goodman.

Goodman: il nuovo enigma dell'induzione

«Tutti gli smeraldi sono verdi»: questa è una proposizione che tutti, più o meno, saremmo disposti ad accettare come vera. Ma se, dice Goodman, creassimo due nuovi predicati, *vlu* e *blerde*, tali che una cosa è *vlu* se, osservata prima del 31 dicembre 2017, è verde, potremmo dire che, ad oggi, è vera sia la proposizione che «tutti gli smeraldi sono verdi» sia quella che dice «tutti gli smeraldi sono *vlu*». Il 1 gennaio 2018, tuttavia, saranno *vlu* tutte le cose che, osservate a partire da quella data, sono blu: il 1 gennaio 2018, tutti gli smeraldi, nel mondo possibile *vlu/blerde*, verranno detti *blerdi* (a meno di non voler ammettere che istantaneamente tutti gli smeraldi del mondo immaginario virassero contemporaneamente dal verde al blu).

Sembra un giochino, ma Goodman si chiede: perché dovremmo fare affidamento induttivo su una natura uniforme e regolare per cui sempre tutti gli smeraldi sono verdi e non su una natura, diversamente regolare, che associa i predicati a caratteri spazio-temporali definiti? D'altra parte la scienza moderna ci ha insegnato a dubitare di predicati assunti da tempo come evidenti (geometrie non euclidee, impossibilità fisica della simultaneità, particelle che possono comportarsi, secondo certi rispetti, come onde e viceversa).

Sistemi di logica induttiva

Carnap, pur consapevole di nuovi e vecchi enigmi dell'induzione, avviò comunque (quasi in solitaria sulla base di una suggestione di J. M. Keynes) un tentativo matematico di realizzare una logica induttiva, o meglio un *continuum* di metodi induttivi (come li chiamò). Il filo conduttore per la costruzione di tali metodi è quello del grado di conferma di una determinata ipotesi sulla base di una qualche evidenza. La logica induttiva della conferma può fare riferimento innanzitutto al calcolo delle probabilità. (Carnap, *Logical Foundations of Probability* (1950), e soprattutto, *The Continuum of Inductive Methods* (1952))

Che vi sia una connessione tra uniformità della natura, grado di conferma di un'ipotesi e probabilità, è abbastanza evidente: ma non tutti sono disposti ad accogliere questa stretta relazione. **K. R. Popper** (1902-1994) sarà uno dei più radicali critici dell'induzione e della logica induttiva e riterrà che mai il rigoroso e affidabile calcolo delle probabilità abbia a che fare con la conferma di una ipotesi. Per valutare una ipotesi scientifica, occorre apertura mentale, tolleranza e il *Modus tollens* della logica classica, non certamente un metodo per calcolare la conferma induttiva data da alcuni casi.

Nel calcolo predicativo classico $\forall x (Fx \rightarrow Gx)$ equivale a una congiunzione (eventualmente infinita) di proposizioni singolari: $(Fa_1 \wedge Ga_1) \wedge (Fa_2 \wedge Ga_2) \wedge \dots \wedge (Fa_n \wedge Ga_n), \dots$: se la congiunzione è teoricamente infinita (caso tipico per una legge di natura) noi mortali non potremo mai esaurire l'analisi di tutti i congiunti. Questo rende l'induzione, secondo Popper, invalida; tuttavia, al contrario, basta un solo caso come $(Fa_{12} \wedge \neg Ga_{12})$ per ottenere (per MT) la falsità della proposizione universale.

Calcolo delle probabilità

Data una proposizione p parliamo della sua probabilità. Ad esempio, possiamo dire che la probabilità che lanciando un dado sia vera l'affermazione «È uscito il 6» è esattamente $1/6$. Indichiamo con $\text{Pr}(p)$ la probabilità di p .

Assiomi di Kolmogòrov:

Enunciamo gli assiomi a cui il calcolo delle probabilità deve attenersi per poter avere una validità che oltrepassi la mera intuizione comune:

K1: $\forall p (0 \leq \text{Pr}(p) \leq 1)$

K2: Se p è certamente vero, $\text{Pr}(p) = 1$

K3: Se p e q sono incompatibili $\text{Pr}(p \vee q) = \text{Pr}(p) + \text{Pr}(q)$

Intuitivamente K3 afferma che quando, ad esempio, lanciamo un dado il risultato «6» è incompatibile con il risultato «2»: dunque la probabilità che esca «un 6 o un 2» è uguale alla probabilità di «è uscito il 6» (1/6) più la probabilità di «è uscito 2» (1/6): quindi la probabilità dell'evento «o esce 6 o esce 2» è uguale a 1/3.

Un risultato immediato è che:

$$\mathbf{K.T1: Pr}(\neg p) = 1 - \mathbf{Pr}(p)$$

Infatti p e $\neg p$ sono incompatibili allora per K3:

$$(1) \mathbf{Pr}(p \vee \neg p) = \mathbf{Pr}(p) + \mathbf{Pr}(\neg p);$$

ma

$$\mathbf{Pr}(p \vee \neg p) = 1,$$

perché $p \vee \neg p$ è una verità logica (dunque sempre vera).
Poiché del resto, per la (1)

$$\mathbf{Pr}(p) + \mathbf{Pr}(\neg p) = 1$$

si ottiene **K.T1**

QED

Un'altro importante teorema è il seguente: in generale, siano o no p e q incompatibili:

$$\mathbf{K.T2:} \quad \Pr(p \vee q) = \Pr(p) + \Pr(q) - \Pr(p \wedge q)$$

Quando p e q sono incompatibili **K.T2** si riduce a K3, poiché $\Pr(p \wedge q) = 0$. È interessante notare però, che quando $\Pr(p \wedge q) > 0$, il suo valore positivo vada sottratto alla somma di $\Pr(p)$ e $\Pr(q)$ per avere la reale $\Pr(p \vee q)$.

[Perché?]. Come si vede in questo caso, la stima intuitiva che siamo portati a fare di una certa probabilità non corrisponde alla valutazione rigorosa mediante l'assiomatica del Calcolo delle probabilità. Questo, mi pare, è un buon motivo per giustificare lo sforzo che logici, matematici e anche filosofi, hanno compiuto per tentare di rendere più rigorose alcune preziose intuizioni.

In qualsiasi maniera si interpretino gli assiomi di Kolmogòrov, essi potranno essere utilizzati per costruire una logica induttiva (con qualsiasi modalità costruttiva) che almeno li rispetti.

Una tale logica induttiva troverà un basilare *ubi consistam* nel cosiddetto Teorema di Bayes. Per comprendere l'importanza di tale teorema del calcolo delle probabilità per la logica induttiva, si dovrà innanzitutto introdurre il concetto di **probabilità condizionale**.

In qualsiasi maniera si interpretino gli assiomi di Kolmogòrov, essi potranno essere utilizzati per costruire una logica induttiva (con qualsiasi modalità costruttiva) che almeno li rispetti.

Una tale logica induttiva troverà un basilare *ubi consistam* nel cosiddetto Teorema di Bayes. Per comprendere l'importanza di tale teorema del calcolo delle probabilità per la logica induttiva, si dovrà innanzitutto introdurre il concetto di **probabilità condizionale**.

$\Pr(p/q)$ si leggerà «probabilità condizionale di p dato q », cioè la probabilità da assegnare a p sulla base dell'assunzione di q .

$$\mathbf{K.T3:} \Pr(p/q) = \frac{\Pr(q)}{\Pr(p \wedge q)}$$

Possiamo, ad esempio, calcolare la probabilità che un lancio di un dado dia come risultato un numero pari, dato che esca un numero maggiore di 3.

Teorema di Bayes

Il teorema di Bayes (dal matematico inglese Thomas Bayes, 1702-1761) utilizza la probabilità condizionale. Il principio di condizionalizzazione del Calcolo delle probabilità ci dice: se il grado di fiducia che assegnavate in passato a $\Pr(p/q)$ era uguale a k , e venite in seguito a sapere q , dovrete assegnare un nuovo grado di fiducia a p , $\Pr_N(p)$, uguale a k . In pratica, venendo in possesso di nuove informazioni, dovremmo rivedere il nostro grado di fiducia. Ora detta h una qualunque ipotesi di cui si stimi una probabilità ed e una qualsiasi evidenza a conferma di h e f un fatto nuovo, futuro o non considerato al momento dell'introduzione dell'ipotesi ma da essa predetto,

$$\mathbf{K.TB:} \Pr(h / e \wedge f) = \frac{\Pr(h/e) \times \Pr(f / h \wedge e)}{\Pr(f/e)}$$

$\Pr(h / e \wedge f)$ può dirsi *probabilità posteriore*; $\Pr(h/e)$ probabilità a priori (o *plausibilità*); $\Pr(f / h \wedge e)$ *verosimiglianza*; $\Pr(f/e)$ *l'aspettativa*.

Logica induttiva e metodo scientifico

Secondo alcuni autori nel teorema di Bayes è contenuta **tutta** la logica induttiva. **K.TB** si può leggere come la constatazione e la giustificazione del fatto che noi impariamo dalle esperienze passate e che, sulla base di codeste, formuliamo ipotesi esplicative e predittive di fatti futuri (o non precedentemente considerati). Tuttavia, come abbiamo visto nel **K.TB** abbiamo che l'espressione della probabilità a priori deve essere già assunta. Per capire come ciò ponga un problema dobbiamo illustrare la procedura che siamo soliti definire metodo scientifico (o sperimentale o galileiano).

$$o_i - h - o_c - L_h$$

o_i rappresenta l'evidenza osservativa disponibile (*osservazioni iniziali*); h l'ipotesi esplicativa; o_c l'osservazione di controllo (nuova evidenza o evidenza sperimentale) e L_h la legge che possiamo ritenere di aver ottenuto confermando l'ipotesi h .

A partire da Reichenbach si è soliti, in filosofia della scienza e in epistemologia, distinguere un *contesto della scoperta* ($o_i - h$) da un *contesto della conferma* ($o_c - L_h$). Ora è facile vedere come **K.TB** si occupi solo di fornire probabilità, e dunque **conferma**, all'ipotesi h sulla base del nuovo fatto o_c (probabilità a posteriori). Ma per ciò che attiene al contesto della **scoperta**, e cioè a quale valutazione di probabilità a priori si possa attribuire ad h solo sulla base dell'evidenza precedente al nuovo fatto, nulla si può dire. Si può concludere dicendo che i vari metodi induttivi costruiti a partire da Carnap si occupano della conferma e non della scoperta di ipotesi. Per quanto riguarda la logica induttiva della scoperta, al di là di qualche sommaria indicazione, non è stato ancora svolto un lavoro di analisi e di critica tale da permetterne una valutazione esaustiva.

Bibliografia e risorse online

Testo introduttivo al significato e alla storia della logica modale:

- Massimo Mugnai, *Possibile Necessario*, 2013, Il Mulino
- <http://tinyurl.com/hwauxe6>

Il classico della logica modale:

- G. E. Hughes e M. J. Cresswell, *Introduzione alla logica modale*, 1973, Il Saggiatore.

Risorse di consultazione

- M. Ferraris, a cura di, *Storia dell'ontologia*, 2008, Bompiani
- S. Kripke, *Nome e necessità*, 1999², Bollati Boringhieri.
- Claudio Pizzi, *Leggi di natura, modalità, ipotesi. la logica del ragionamento controfattuale*, 1978, Feltrinelli
- <http://tinyurl.com/z9q7u4f>

Bibliografia logica intuizionistica e paracoerente

- D. Palladino, C. Palladino, *Logiche non classiche, Un'introduzione*, Carocci editore, Roma, 2014⁵
- S. Galvan, *Non contraddizione e Terzo escluso*, Franco Angeli, Milano, 2015⁶

Bibliografia

- M. Pera, *Hume, Kant e l'induzione*, 1982, il Mulino
- B. Skyrms, *Introduzione alla logica induttiva*, 1974, il Mulino
- <http://tinyurl.com/z7jkfr3>
- K. Lambert, G.G. Brittan, *Introduzione alla filosofia della scienza*, 1981, Bollati Boringhieri
- I. Hacking, *Introduzione alla probabilità e alla logica induttiva*, 2005, Il Saggiatore